УДК 373: [512 + 517]
ББК 22.12я721 + 2.161я721
Н49

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист № 1/11-7731 від 28 грудня 2005 р.)

Рецензенти:

М. І. Бурда, член-кореспондент АПН України, доктор педагогічних наук, професор, заступник директора Інституту педагогіки АПН України

В. О. Золотарьов, доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та інформатики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна

О. М. Роганін, учитель математики вищої категорії, учитель-методист Пісочинського колегіуму Харківського району Харківської області

Художник *С. Е. Кулинич*

Умовні позначення в підручнику

█	**головне в навчальному матеріалі**
▶	початок розв'язання задачі
◁	закінчення розв'язання задачі
●	початок обґрунтування твердження
○	закінчення обґрунтування твердження

Нелін Є. П., Долгова О. Є.
Н49 Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закладів.— 2-ге вид., виправл. і доп.— Х.: Світ дитинства, 2006.— 416 с.
ISBN 966-544-387-9.

УДК 373: [512 + 517]
ББК 22.12я721 + 2.161я721

ISBN 966-544-387-9

Передмова для учнів

Пропонований підручник для 11 класу є продовженням підручника «Алгебра і початки аналізу» для 10 класу. У 11 класі розглядається принципово нова частина курсу — початки аналізу. *Математичний аналіз* (або просто аналіз) — галузь математики, сформована в XVIII ст., яка відіграла значну роль у розвитку природознавства: з'явився потужний, досить універсальний метод дослідження функцій, що виникають під час розв'язування різноманітних прикладних задач. Також у 11 класі буде розглянуто елементи комбінаторики, теорії імовірностей та статистики, що також знаходять широке застосування в найрізноманітніших галузях знань.

Структура підручника для 11 класу повністю аналогічна до структури підручника для 10 класу. Нагадаємо про те, як користуватися підручником.

Система навчального матеріалу підручника з кожної теми представлена на двох рівнях. *Основний матеріал* наведено в параграфах, номери яких позначено синім кольором. *Додатковий матеріал* (номери параграфів позначено сірим кольором) призначений для оволодіння темою на більш глибокому рівні і може опановуватися учнем самостійно чи під керівництвом учителя при вивченні математики в класах універсального або природничого профілів, або використовуватися для систематичного вивчення поглибленого курсу алгебри і початків аналізу в класах, школах, ліцеях і гімназіях фізико-математичного профілю.

На початку багатьох параграфів наводяться *довідкові таблиці,* які містять основні означення, властивості та *орієнтири* по пошуку плану розв'язування задач з теми. Для ознайомлення з основними ідеями розв'язування задач наводяться приклади, у яких, крім самого розв'язання, міститься *коментар,* що допоможе скласти план розв'язування аналогічного завдання.

З метою закріплення, контролю і самоконтролю засвоєння навчального матеріалу після кожного параграфа пропонується система запитань і вправ. Відповіді на ці запитання і приклади розв'язування аналогічних вправ можна знайти в тексті параграфа. Система вправ до основного матеріалу подана на трьох рівнях. *Задачі середнього рівня* позначено символом «°», дещо складніші *задачі достатнього рівня* подано без позначень, а *задачі високого рівня* складності позначено символом «*». В підручнику і для багатьох задач поглибленого рівня пропонуються спеціальні орієнтири, які дозволяють опанувати методи їх розв'язування. *Відповіді і вказівки* до більшості вправ наведено у відповідному розділі. Про походження понять, термінів і символів ви зможете дізнатися, прочитавши «Відомості з історії». У кінці підручника наведено довідковий матеріал.

Передмова для вчителя

Пропонований підручник спрямовано на реалізацію основних положень концепції профільного навчання в старшій школі, на організацію особистісно-орієнтованого навчання математики. Підручник підготовлено відповідно до діючої програми з алгебри і початків аналізу для 10–11 класів з урахуванням програми з алгебри і початків аналізу для 10–12 класів.

Як відомо, у навчанні підручник виконує дві основні функції: 1) є джерелом навчальної інформації, яка розкриває в доступній для учнів формі передбачений освітніми стандартами зміст; 2) виступає засобом навчання, за допомогою якого здійснюється організація навчального процесу, у тому числі і самоосвіта учнів.

Відзначимо основні відмінності пропонованого підручника від інших підручників з алгебри і початків аналізу в реалізації цих функцій.

Це *дворівневий підручник,* який містить загальний матеріал для класів універсального, природничого та фізико-математичного профілів і додатковий матеріал для класів фізико-математичного профілю. У кожному розділі поряд з параграфами, що призначені для оволодіння учнями стандартом математичної освіти на академічному рівні, є систематичний матеріал для організації індивідуальної роботи з учнями, які цікавляться математикою. Запропонований додатковий матеріал може використовуватися і для організації навчання алгебри і початків аналізу в профільних класах фізико-математичного профілю або в спеціалізованих школах і класах з поглибленим вивченням математики.

Основний матеріал, який повинні засвоїти учні, структуровано у формі *довідкових таблиць* на початку параграфа, які містять систематизацію теоретичного матеріалу та *способів діяльності* з цим матеріалом у формі спеціальних *орієнтирів по розв'язуванню завдань. У першу чергу учні повинні засвоїти матеріал, який міститься в таблицях*. Тому при поясненні нового матеріалу доцільно використовувати роботу з підручником за відповідними таблицями та рисунками. Усі потрібні пояснення й обґрунтування теж наведено в підручнику, але кожен учень може вибирати свій власний рівень ознайомлення з цими обґрунтуваннями.

Підкреслимо, що будь-який підручник з алгебри і початків аналізу повинен забезпечити не тільки ознайомлення учнів з основними алгебраїчними поняттями та їх властивостями (тобто дати можливість формувати в учнів знання з алгебри і початків аналізу), а й формування способів дій з цими поняттями (тобто дати можливість формувати в учнів уміння з алгебри і початків аналізу). Ту систему умов, на яку реально спирається учень при виконанні дії, психологи називають орієнтовною основою дії. Якщо учням пропонуються досить загальні орієнтовні основи по розв'язуванню відповідних завдань у вигляді спеціальних правил та алгоритмів, то кажуть, що їм пропонуються орієнтовні основи другого і третього типів. Як правило, у підручниках алгебри і початків аналізу для 10–11 класів учням пропонуються тільки зразки розв'язувань завдань, а потім учні приступають до самостійної діяльності, орієнтуючись на ці зразки (тобто учням пропонуються орієнтовні основи першого типу). Таке навчання передбачає, що учень самостійно виконає систематизацію та узагальнення способів дій, орієнтуючись на запропоновані зразки, і виділить для себе орієнтовну основу розв'язування розглянутих завдань. Як правило, у цьому випадку орієнтовна основа, що створюється в учня, неповна, і, крім того, вона часто не усвідомлена, бо учень не може пояснити, чому він виконував саме такі перетворення при розв'язуванні завдання, а не інші.

З цієї причини одним із принципів побудови нашого підручника було виділення для учнів орієнтовних основ відповідної діяльності по розв'язуванню алгебраїчних завдань безпосередньо в підручнику.

У кожному розділі розв'язанню вправ передує виділення загальних орієнтирів по розв'язуванню таких завдань. Тому важливою складовою роботи за пропонованим підручником є обговорення вибору відповідних орієнтирів та планів розв'язування завдань. Пояснення методів розв'язування ведеться за схемою:

Розв'язання	Коментар
Як можна записати розв'язання задачі	Як можна міркувати при розв'язуванні такої задачі

При такій подачі навчального матеріалу коментар, у якому пояснюється розв'язання, не заважає сприйняттю основної ідеї та плану розв'язування завдань певного типу. Це дозволяє учневі, який уже засвоїв спосіб розв'язування, за допомогою наведеного прикладу згадати, як розв'язувати завдання, а учневі, якому потрібна консультація по розв'язуванню, — отримати детальну консультацію, що міститься в коментарі.

За рахунок чіткого виділення загальних орієнтирів роботи з практичними завданнями курсу вдається частину «нестандартних» (з точки зору традиційних підручників) завдань перевести в розряд «стандартних» (наприклад, рівняння, для розв'язування яких доводиться використовувати властивості функцій). Це дозволяє зменшити розрив між рівнем вимог державної атестації з алгебри і початків аналізу та рівнем вимог із цього курсу на вступних іспитах до вузів, а також ознайомити учнів з методами розв'язування завдань, які пропонуються на вступних іспитах до вузів.

Зауважимо, що детальна систематизація за змістовними лініями навчального матеріалу та відповідних способів діяльності по розв'язуванню завдань курсу міститься також у посібнику Є. П. Неліна «Алгебра в таблицях. Навчальний посібник для учнів 7–11 класів».— Харків: Світ дитинства, 1998–2005, який доцільно використовувати в навчальному процесі в комплекті з підручником.

Розділ 1
Похідна та її застосування

§ 1 ДІЙСНІ ЧИСЛА ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 1

1. Числові множини

Дійсні числа* R

Числа, які можна подати у вигляді нескінченного десяткового дробу

Раціональні числа Q

Можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Записуються у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)\right)$

Ірраціональні числа

Не можна подати у вигляді нескоротного дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Записуються у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу

$\left(\sqrt{2} = 1{,}4142135...\right)$

Цілі числа Z

Включають натуральні числа, числа, їм протилежні, та число 0

Дробові числа

Числа, складені з цілого числа часток одиниці $\left(\frac{2}{5}\right.$ — звичайний дріб, 1,23 — десятковий дріб: $\left.1{,}23 = \frac{123}{100}\right)$

Натуральні числа N (цілі додатні)

Для шкільного курсу математики натуральне число — основне неозначуване поняття

Число 0

Таке число, що будь-яке число при додаванні до нього не змінюється

$(a + 0 = 0 + a = a)$

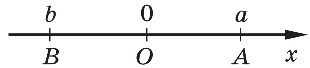
Цілі від'ємні числа

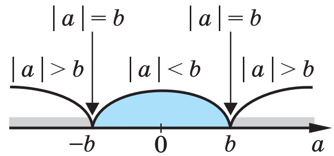
Числа, протилежні натуральним

---

* У розділі 3 § 22 буде розглянута ще одна числова множина — комплексні числа, яка включає до себе множину дійсних чисел.

Продовж. табл. 1

<table>
<tr><td colspan="3">2. Модуль дійсного числа та його властивості</td></tr>
<tr><td colspan="2">Означення</td><td>Геометричний зміст модуля</td></tr>
<tr><td colspan="2">Модулем додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю
$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases}$$</td><td>

$|a| = OA, \quad |b| = OB$
$|a - b| = AB$
На координатній прямій модуль — це відстань від початку координат до точки, що зображує дане число.
Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій</td></tr>
<tr><td colspan="3">Властивості</td></tr>
<tr><td>1.</td><td>$\boxed{|a| \geqslant 0}$</td><td>Модуль будь-якого числа — невід'ємне число</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>$\boxed{|-a| = |a|}$</td><td>Модулі протилежних чисел рівні</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>$\boxed{a \leqslant |a|}$, тобто $\boxed{-|a| \leqslant a \leqslant |a|}$</td><td>Кожне число не більше за його модуль</td></tr>
<tr><td>4.
5.</td><td>$\boxed{\text{При } b > 0 \ |a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b}$
$\boxed{\text{При } b > 0 \ |a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ або } a \geqslant b}$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$</td><td>Модуль добутку дорівнює добутку модулів множників</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>$\boxed{\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \ (b \neq 0)}$</td><td>Модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю)</td></tr>
<tr><td>8.</td><td colspan="2">$\boxed{|a^n| = |a|^n}$ $|a|^2 = a^2$ $|a|^{2k} = a^{2k}$</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>$\boxed{|a + b| \leqslant |a| + |b|}$
$\boxed{|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|}$</td><td>Модуль суми не перевищує суми модулів доданків</td></tr>
<tr><td>10.</td><td colspan="2">$\boxed{\big||a| - |b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|}$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Числові множини. У курсі математики ви зустрічалися з різними числами: натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними, дійсними. Уявлення про числа у людства складалися поступово, під впливом вимог практики. Наприклад, *натуральні числа* з'явилися у зв'язку з необхідністю підрахунку предметів. Але для того щоб дати відповідь на запитання «Скільки сірників у порожній коробці з-під сірників?», множини натуральних чисел $N = \{1; 2; 3; ...\}$ недостатньо — для цього потрібно мати ще й число нуль. Приєднуючи до множини N натуральних чисел число 0, одержуємо множину *невід'ємних цілих чисел*. Її часто позначають $Z_0 = \{0; 1; 2; 3; ...\}$. Одних тільки невід'ємних цілих чисел виявилося недостатньо для розв'язування задач практики (а отже, і математичних задач, що відображують задану реальну ситуацію). Так, для того щоб охарактеризувати температуру повітря вище і нижче нуля чи рух тіла в протилежних напрямках, потрібні протилежні до натуральних числа, тобто *від'ємні числа*. Для натурального числа n протилежним вважається число $-n$, а для числа $-n$ протилежним вважається число n. Нуль вважають протилежним самому собі.

Натуральні числа, числа, протилежні натуральним, і число нуль складають множину Z *цілих чисел*.

Вимірювання величин привело до необхідності розширення множини цілих чисел і введення раціональних чисел. Наприклад, середня багаторічна температура повітря в січні місяці в м. Харкові $-7,3$ °C, тривалість уроку — 45 хвилин або $\frac{3}{4}$ години.

Таким чином, вибираючи якусь одиницю вимірювання, ми одержуємо числове значення величин, що може виражатися за допомогою різних раціональних чисел — цілих і дробових, додатних і від'ємних.

Цілі і дробові числа складають множину Q *раціональних чисел*.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$ (тобто чисельник m є цілим числом, а знаменник n — натуральним).

Раціональне число може бути записане різними дробами. Наприклад,

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{10}{20}, \quad -\frac{2}{7}=\frac{-2}{7}=\frac{-8}{28}=\frac{-10}{35}, \quad 1{,}2=\frac{12}{10}=\frac{6}{5}=\frac{120}{100}, \quad 5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{50}{10}.$$

Як видно з наведених прикладів, серед дробів, що зображують дане раціональне число, завжди є єдиний нескоротний дріб (для цілих чисел — це дріб, знаменник якого дорівнює 1).

Зауважимо, що раціональне число, записане у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$, можна також записати у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу, поділивши чисельник на знаменник. Наприклад, $\frac{3}{4}=0{,}75$, $\frac{1}{3}=0{,}3333...$

Домовимося, що скінченний десятковий дріб можна зображувати у вигляді нескінченного, у якого після останнього десяткового знаку, відмінного від нуля, на місці наступних десяткових знаків записуються нулі, наприклад, $\frac{3}{4}=0{,}75=0{,}75000\ldots$.

Цілі числа також домовимося записувати у вигляді нескінченного десяткового дробу, у якого справа від коми на місці десяткових знаків стоять нулі, наприклад, $13 = 13{,}000\ldots$. Таким чином, будь-яке раціональне число може бути записане як нескінченний періодичний дріб. Нагадаємо, що у нескінченного періодичного дробу, починаючи з деякого місця, всі десяткові знаки починають повторюватися. Групу цифр, яка повторюється, називають *періодом*. При запису періодичного дробу період записують у дужках. Наприклад, $\frac{1}{3}=0{,}3333\ldots=0{,}(3)$, $\frac{3}{22}=0{,}136363636\ldots=0{,}1(36)$.

Отже, *кожне раціональне число може бути записане у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб задає раціональне число*.

Зауважимо, що будь-який періодичний десятковий дріб, який має своїм періодом дев'ятку, дорівнює нескінченному десятковому дробу з періодом нуль, у якого десятковий розряд, що передує періоду, збільшений на одиницю порівняно з розрядом першого дробу. Наприклад, нескінченні періодичні дроби 0,2(9) і 0,3(0) є записом одного й того самого раціонального числа $\frac{3}{10}$. Дійсно, враховуючи, що сума нескінченної спадної геометричної прогресії з першим членом a_1 і знаменником q обчислюється за формулою $S=\frac{a_1}{1-q}$, маємо $0{,}2(9)=0{,}2999\ldots=0{,}2+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10000}+\ldots=0{,}2+\frac{\frac{9}{100}}{1-\frac{1}{10}}=$

$$=0{,}2+\frac{1}{10}=0{,}3=0{,}3(0).$$

У подальшому, записуючи раціональні числа за допомогою нескінченних періодичних десяткових дробів, домовимося виключити з розгляду нескінченні періодичні дроби, період яких дорівнює дев'яти.

Кожне раціональне число можна зобразити точкою на координатній прямій (тобто на прямій, на якій вибрано початок відліку, додатний напрям і одиницю вимірювання). Наприклад, на рисунку 1 зображено декілька раціональних чисел $\left(0;\ 1;\ -\frac{1}{2};\ 2{,}5\right)$.

Рис. 1

Але на координатній прямій є точки, які зображають числа, що не є раціональними. Наприклад, з курсу

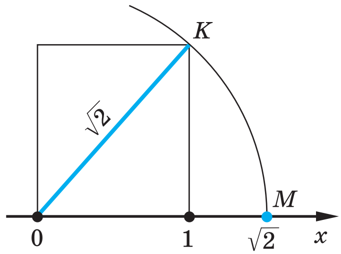


Рис. 2

алгебри відомо, що число $\sqrt{2}$ не є раціональним. Це так зване ірраціональне число (див. також приклад 2 на с. 15). Якщо побудувати квадрат із стороною, рівною 1, на координатній прямій x (рис. 2), то його діагональ дорівнюватиме $\sqrt{2}$. Тоді, провівши дугу кола з центром у точці O і радіусом $OM = \sqrt{2}$, одержимо точку M, координата якої дорівнює $\sqrt{2}$. Крім числа $\sqrt{2}$ ви також зустрічалися з ірраціональними числами $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$, π, e, lg 2 та ін.

Раціональні та ірраціональні числа складують множину дійсних чисел* $\boldsymbol{R}$. На координатній прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка і навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число (у цьому випадку кажуть, що між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої встановлюється взаємно однозначна відповідність).

Кожне дійсне число може бути записане у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа — у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, а ірраціональні — у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Нагадаємо, що для порівняння дійсних чисел і виконання дій над ними (у випадку, коли хоча б одне з них не є раціональним) використовуються наближені значення цих чисел. Зокрема, *для порівняння двох дійсних чисел послідовно розглядаємо їх наближені значення з недостачею з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д. до тих пір, поки не одержимо, що якесь наближене значення одного числа більше за відповідне наближене значення другого. Тоді те число, у якого наближене значення більше, і вважається більшим.* Наприклад, якщо $\alpha = \sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$, $\beta = 1\frac{3}{4} = 1{,}7500000\ldots$, то $\alpha < \beta$ (оскільки $1{,}73 < 1{,}75$).

Для виконання додавання чи множення розглянутих чисел α і β послідовно записують їх наближені значення з недостачею та з надлишком (з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д.) і виконують дії над одержаними раціональними числами. У результаті послідовно отримуємо значення суми чи добутку з потрібною точністю.

α	β	$\alpha + \beta$	$\alpha\beta$
$1 < \alpha < 2$	$1 < \beta < 2$	$2 < \alpha + \beta < 4$	$1 < \alpha\beta < 4$
$1{,}7 < \alpha < 1{,}8$	$1{,}7 < \beta < 1{,}8$	$3{,}4 < \alpha + \beta < 3{,}6$	$2{,}89 < \alpha\beta < 3{,}24$
$1{,}73 < \alpha < 1{,}74$	$1{,}75 < \beta < 1{,}76$	$3{,}48 < \alpha + \beta < 3{,}50$	$3{,}0275 < \alpha\beta < 3{,}0624$
$1{,}732 < \alpha < 1{,}733$	$1{,}750 < \beta < 1{,}751$	$3{,}482 < \alpha + \beta < 3{,}484$	$3{,}031 < \alpha\beta < 3{,}034483$
…	…	…	…

* Більш детально про побудову множини дійсних чисел див. на с. 183. Властивості дій над дійсними числами розглядаються також у § 22 (див. с. 359, 361, 362).

Як бачимо, $\alpha + \beta = 3,48\ldots$, $\alpha\beta = 3,03\ldots$.

У курсі математичного аналізу доводиться, що у випадку, коли наближені значення чисел α і β послідовно беруться з точністю до цілих, десятих, сотих і т. д., то значення суми $\alpha + \beta$ з недостачею і з надлишком прямує до одного і того самого числа, яке і приймається за значення суми $\alpha + \beta$ (аналогічно означається і добуток $\alpha\beta$).

2. Модуль дійсного числа та його властивості. Нагадаємо означення модуля.

Модулем **додатного числа називається саме це число, модулем від'ємного числа називається число, йому протилежне, модуль нуля дорівнює нулю.**

Це означення можна коротко записати декількома способами.

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ 0 \text{ при } a = 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a < 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad |a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{або}$$

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0, \\ -a \text{ при } a \leqslant 0. \end{cases}$$ При необхідності ми будемо користуватися будь-яким з цих записів означення модуля. Для знаходження $|a|$ за означенням необхідно знати знак числа a і використати відповідну формулу. Наприклад, $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$, $\left|\sqrt{3} - 2\right| = -\left(\sqrt{3} - 2\right) = 2 - \sqrt{3}$.

На координатній прямій модуль числа — це відстань від початку координат до точки, що зображує це число.

Дійсно, якщо $a > 0$ (рис. 3), то відстань $OA = a = |a|$. Якщо $b < 0$, то відстань $OB = -b = |b|$.

Модуль різниці двох чисел a і b — це відстань між точками a і b на координатній прямій.

Для доведення можна скористатися тим, що при паралельному перенесенні вздовж осі координат на b одиниць абсциса відповідної точки змінюється на b: до абсциси заданої точки додається число b, тобто при $b > 0$ точка переноситься вправо, а при $b < 0$ — вліво. Позначимо на координатній прямій числа a, b, $a - b$ відповідно точками A, B, C. На рисунку 4 ці точки зображено для випадку $a > 0$ і $b < 0$, хоча наведене далі обґрунтування не залежить від знаків a і b.

При паралельному перенесенні вздовж осі Ox на b одиниць точка O перейде в точку B, а точка C (з координатою $a - b$) у точку з координатою

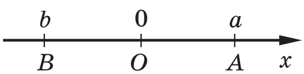


Рис. 3

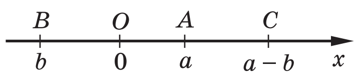


Рис. 4

$a - b + b = a$, тобто в точку A. Тоді $CO = AB$. Але відстань CO — це відстань від точки $a - b$ до початку координат, отже, $CO = |a - b|$, а значить, і $AB = |a - b|$ ◯.

Використовуючи означення модуля і його геометричний зміст, можна обґрунтувати властивості модуля, наведені в таблиці 1.

Наприклад, враховуючи, що $|a|$ — це відстань від точки a до точки O, а відстань може виражатися тільки невід'ємним числом, одержуємо

$$|a| \geqslant 0,$$

тобто *модуль будь-якого числа є невід'ємне число*.

Враховуючи, що точки a і $-a$ знаходяться на однаковій відстані від точки O, одержуємо

$$|-a| = |a|,$$

Це означає, що *модулі протилежних чисел рівні*.

Якщо $a \geqslant 0$, то $|a| = a$, а якщо $a < 0$, то $a < |a|$. Отже, завжди

$$a \leqslant |a|,$$

тобто *кожне число не більше за його модуль*.

Якщо в останню нерівність замість a підставити $-a$ і врахувати, що $|-a| = |a|$, то одержуємо нерівність $-a \leqslant |a|$. Звідси $a \geqslant -|a|$, що разом з нерівністю $a \leqslant |a|$ свідчить, що для будь-якого дійсного числа a виконується подвійна нерівність

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|. \qquad (1)$$

При $b > 0$ нерівність $|a| \leqslant b$ означає, що число a на координатній прямій знаходиться від точки O на відстані, яка не перевищує b (рис. 5), тобто в проміжку $[-b; b]$. Навпаки, якщо число a знаходиться в цьому проміжку, тобто $-b \leqslant a \leqslant b$, то $|a| \leqslant b$. Отже,

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \leqslant b \Leftrightarrow -b \leqslant a \leqslant b. \qquad (2)$$

Зауважимо, що останнє твердження справедливе і при $b = 0$ (тоді обом нерівностям задовольняє тільки одне значення $a = 0$).

Аналогічно при $b > 0$ нерівність $|a| \geqslant b$ означає, що число a на координатній прямій знаходиться від точки O на відстані, яка більша або дорівнює b (рис. 5), тобто в цьому випадку $a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$. Навпаки, якщо число a задовольняє одній із цих нерівностей, то $|a| \geqslant b$. Отже, при $b > 0$ нерівність $|a| \geqslant b$ рівносильна сукупності нерівностей $a \leqslant -b$ або $a \geqslant b$, що можна записати так:

$$\text{при } b > 0 \quad |a| \geqslant b \Leftrightarrow a \leqslant -b \text{ або } a \geqslant b.$$

Властивості модуля добутку і модуля дробу фіксують відомі правила дій над числами з однаковими і різними знаками:

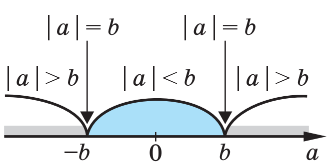


Рис. 5

модуль добутку дорівнює добутку модулів множників, тобто

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|;$$

модуль дробу дорівнює модулю чисельника, поділеному на модуль знаменника (якщо знаменник не дорівнює нулю), тобто

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0).$$

Формулу для знаходження модуля добутку можна узагальнити для випадку декількох множників

$$|a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n| = |a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_n| \qquad (3)$$

і обґрунтувати за допомогою методу математичної індукції*.

Дійсно, формула (3) справедлива при $n = 2$:

$$|a_1\cdot a_2| = |a_1|\cdot|a_2| \qquad (4)$$

(як відмічалося вище, це випливає з правил дій над числами з однаковими і різними знаками). Припустимо, що ця формула справедлива при $n = k$, тобто припустимо, що

$$|a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k| = |a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_k|. \qquad (5)$$

За допомогою формул (4) і (5) одержуємо, що й для наступного значення $n = k + 1$ формула (3) теж виконується, оскільки

$$|a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k\cdot a_{k+1}| = |(a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k)\cdot a_{k+1}| = |a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_k|\cdot|a_{k+1}| =$$
$$= |a_1|\cdot|a_2|\cdot\ldots\cdot|a_k|\cdot|a_{k+1}|.$$

Тоді згідно методу математичної індукції формула (3) справедлива для всіх натуральних значень n, які більші або дорівнюють 2.

Якщо у формулі (3) взяти $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, одержуємо формулу

$$|a^n| = |a|^n.$$

Застосовуючи останню формулу справа наліво при $n = 2k$ і враховуючи, що $a^{2k} \geqslant 0$ при всіх значеннях a, одержуємо $|a|^{2k} = |a^{2k}| = a^{2k}$. Отже,

$$|a|^{2k} = a^{2k}.$$

Для обґрунтування нерівності

$$|a + b| \leqslant |a| + |b| \qquad (6)$$

запишемо нерівність (1) для чисел a і b:

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|;\ -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Додаючи почленно ці нерівності, одержуємо

$$-(|a| + |b|) \leqslant a + b \leqslant |a| + |b|.$$

Враховуючи нерівність (2), маємо

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

тобто *модуль суми не перевищує суми модулів доданків*.

* Див. підручник для 10 класу, с. 111.

За допомогою методу математичної індукції цю властивість можна довести і для випадку n доданків (де $n \geqslant 2$):

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Якщо в нерівності (6) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a - b| \leqslant |a| + |b|. \tag{7}$$

Якщо записати число a так: $a = b + (a - b)$ і використати нерівність (6), то одержимо нерівність $|a| \leqslant |b| + |a - b|$. Звідси

$$|a| - |b| \leqslant |a - b|. \tag{8}$$

Якщо в нерівності (8) замінити b на $-b$ і врахувати, що $|-b| = |b|$, то одержимо нерівність

$$|a| - |b| \leqslant |a + b|, \tag{9}$$

тобто *модуль суми двох чисел не менше різниці їх модулів.*

Міняючи місцями букви a і b у нерівностях (8) і (9) та враховуючи, що $|a - b| = |b - a|$, маємо також нерівності

$$|b| - |a| \leqslant |a \pm b|. \tag{10}$$

Одержані нерівності (6) – (10) можна коротко записати так:

$$||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Доведіть, що **сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка** (якщо дільник не дорівнює нулю) **двох раціональних чисел завжди є раціональним числом.**

Розв'язання

Нехай задано два раціональних числа $r_1 = \frac{m_1}{n_1}$ і $r_2 = \frac{m_2}{n_2}$, де m_1 і m_2 — цілі, а n_1 і n_2 — натуральні числа. Оскільки сума, різниця, добуток, натуральний степінь і частка двох звичайних дробів завжди є звичайним дробом, то одержаний результат завжди буде раціональним числом. Наприклад,

$$r_1 + r_2 = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2 + n_1 m_2}{n_1 n_2},$$

де $m_1 n_2 + n_1 m_2$ — ціле число, а $n_1 n_2$ — натуральне. ◁

Коментар

Будь-яке раціональне число може бути записане як дріб $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число. Щоб довести твердження задачі, достатньо довести, що сума, різниця, добуток і частка двох дробів $\frac{m}{n}$ виду знову буде дробом такого виду.

Приклад 2 Доведіть, що **для будь-якого натурального числа n число $\sqrt[m]{n}$ ($m \in N$)[*] або натуральне, або ірраціональне.**

Коментар

Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного: припустити, що задане дійсне додатне число є раціональним не натуральним (тобто дробом), і отримати суперечність з умовою або з якимсь відомим фактом.

Записуючи $\sqrt[m]{n}$ у вигляді нескоротного дробу, слід враховувати, що при натуральних значеннях n це число завжди буде невід'ємним.

Розв'язання

▶ Припустимо, що $\sqrt[m]{n}$ не є ірраціональним числом (тоді це число раціональне) і не є натуральним числом. Отже, це число може бути тільки раціональним нескоротним дробом $\sqrt[m]{n}=\frac{p}{q}$, де p і q — натуральні числа ($q \neq 1$). За означенням кореня m-го степеня маємо $n=\frac{p^m}{q^m}$. Тобто $n=\frac{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}{\underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{m \text{ разів}}}$. Враховуючи, що $q \neq 1$, одержуємо, що дріб $\frac{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}$, який дорівнює натуральному числу n, повинен бути скоротним. Отже, у натуральних множників, які стоять у чисельнику і знаменнику цього дробу, повинен бути спільний натуральний дільник, який відрізняється від 1. Але в чисельнику стоять тільки множники p, а в знаменнику — тільки множники q. Тоді числа p і q мають натуральний дільник, який відрізняється від 1, тобто дріб $\frac{p}{q}$ є скоротним дробом, що суперечить умові. Таким чином, наше припущення неправильне, і для будь-якого натурального числа n число $\sqrt[m]{n}$ ($m \in N$) або натуральне, або ірраціональне. ◁

Наприклад, оскільки числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt[3]{10}$ не є натуральними числами $\left(1<\sqrt{3}<2,\ 2<\sqrt[3]{10}<3\right)$, то $\sqrt{3}$ і $\sqrt[3]{10}$ — ірраціональні числа.

Приклад 3* Доведіть, що $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ — число ірраціональне.

Розв'язання

▶ Припустимо, що число $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}=r$ — раціональне. Тоді $\sqrt[3]{5}=r-\sqrt{3}$. Піднісши обидві частини останньої рівності до кубу, має-

Коментар

Для доведення твердження задачі можна використати метод від супротивного: припустити, що задане дійсне число є раціональним і отримати суперечність з якимсь

[*] При $m=1$ домовимося вважати, що $\sqrt[m]{n}=\sqrt[1]{n}=n$.

мо $5 = r^3 - 3\sqrt{3}r^2 + 9r - 3\sqrt{3}$. Звідси $\sqrt{3}(3r^2 + 3) = r^3 + 9r - 5$. Отже, $\sqrt{3} = \frac{r^3 + 9r - 5}{3r^2 + 3}$. Але права частина цієї рівності раціональне число (оскільки за припущенням r — раціональне число), а ліва — ірраціональне. Одержана суперечність означає, що наше припущення неправильне і число $\sqrt{3} + \sqrt[3]{5}$ — ірраціональне. ◁ відомим фактом, наприклад, з тим, що $\sqrt{3}$ — ірраціональне число.

При аналізі одержаних виразів використовуємо результат прикладу 1: *якщо число r — раціональне, то числа $r^3 + 9r - 5$ і $3r^2 + 3$ та їх частка теж будуть раціональними*.

Зазначимо, що при будь-якому раціональному r знаменник отриманого дробу $3r^2 + 3 \neq 0$.

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння* $|2x + 5| = 7$.

I спосіб

Розв'язання

▶ $2x + 5 = 7$ або $2x + 5 = -7$,

$2x = 2$ або $2x = -12$,

$x = 1$ або $x = -6$.

Відповідь: 1; –6. ◁

Коментар

Задане рівняння має вигляд $|t| = 7$ (у даному випадку $t = 2x + 5$). Його зручно розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля: $|2x + 5|$ — це відстань від точки 0 до точки $2x + 5$. Але відстань 7 може бути відкладена від 0 як праворуч (одержуємо число 7), так і ліворуч (одержуємо число –7). Отже, рівність $|2x + 5| = 7$ можлива тоді і тільки тоді, коли $2x + 5 = 7$ або $2x + 5 = -7$.

II спосіб

Розв'язання

▶ $|2x - (-5)| = 7$,

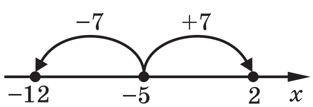


Рис. 6

$2x = 2$ або $2x = -12$,

$x = 1$ або $x = -6$.

Відповідь: 1; –6.

Коментар

З геометричної точки зору $|a - b|$ — це відстань між точками a і b на координатній прямій. Запишемо задане рівняння так: $|2x - (-5)| = 7$. Тоді рівність $|2x - (-5)| = 7$ означає, що відстань від точки $2x$ до точки –5 дорівнює 7. На відстані 7 від точки –5 знаходяться точки 2 і –12 (рис. 6). Отже, задана рівність виконується тоді і тільки тоді, коли $2x = 2$ або $2x = -12$, тобто задане рівняння рівносильне цій сукупності рівнянь.

* Розв'язування рівнянь і нерівностей з модулями розглянуто в підручнику для 10 класу — табл. 40 на с. 240 (див. також с. 392 підручника для 11 класу).

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $|x^2 - 5x| \leqslant 6$.

Розв'язання

► $-6 \leqslant x^2 - 5x \leqslant 6$,

$$\begin{cases} x^2 - 5x \leqslant 6, \\ x^2 - 5x \geqslant -6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 5x - 6 \leqslant 0, \\ x^2 - 5x + 6 \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+1)(x-6) \leqslant 0, \\ (x-2)(x-3) \geqslant 0. \end{cases}$$

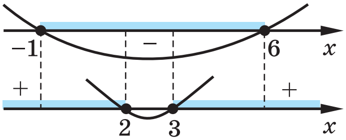


Рис. 7

Розв'язуючи ці нерівності (рис. 7), отримаємо

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 6, \\ x \leqslant 2 \text{ або } x \geqslant 3. \end{cases}$$

Отже, $-1 \leqslant x \leqslant 2$ або $3 \leqslant x \leqslant 6$.

Відповідь: $[-1; 2] \cup [3; 6]$. ◁

Коментар

Задана нерівність має вигляд $|t| \leqslant 6$ (у даному випадку $t = x^2 - 5x$), і її можна розв'язувати, використовуючи геометричний зміст модуля. З геометричної точки зору, $|t|$ — це відстань від точки 0 до точки t. На відстані 6 від 0 знаходяться числа 6 і -6. Тоді нерівності $|t| \leqslant 6$ задовольняють усі ті і тільки ті точки, які знаходяться в проміжку $[-6; 6]$, тобто $6 \leqslant t \leqslant 6$. Для розв'язування одержаної подвійної нерівності її зручно замінити відповідною системою.

Запитання для контролю

1. Поясніть, які числа входять до множин цілих, раціональних та дійсних чисел. Наведіть приклади. Зобразіть відповідні точки на координатній прямій.
2. Поясніть, чим відрізняються записи у вигляді нескінченного десяткового дробу раціонального та ірраціонального чисел.
3. а) Дайте означення модуля дійсного числа. Сформулюйте властивості модуля.
   б*) Обґрунтуйте властивості модуля дійсного числа.

Вправи

1. Поясніть, чому задане дійсне число не може бути раціональним:
   1) $1+\sqrt{2}$; 2) $\sqrt{3}-5$; 3) $\sqrt[3]{10}$.

2*. Доведіть, що сума (різниця, добуток та частка) раціонального та ірраціонального чисел завжди є число ірраціональне (добуток і частка тільки у випадку, коли задане раціональне число не дорівнює нулю).

3*. Доведіть, що задані дійсні числа є ірраціональними:
   1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; 2) $\sqrt{5}+\sqrt[3]{2}$; 3) $\lg 2$; 4) $\log_2 3$.

4. Користуючись геометричним змістом модуля, зобразіть на координатній прямій множину чисел, які задовольняють нерівності:

1°) $|x| \leqslant 2$; 2°) $|x| > 5$;

3) $|x - 3| \leqslant 0{,}5$; 4) $|x + 1| < 0{,}3$.

5. Розв'яжіть рівняння:

1) $|3x + 1| = 4$; 2) $|4x - 2| = 6$;

3*) $||x - 1| - 2| = 1$; 4*) $||2x + 3| - 5| = 3$.

6. Розв'яжіть нерівність:

1) $|2x - 7| \leqslant 1$; 2) $|3x + 5| > 7$;

3*) $||2x - 1| + 3| \geqslant 5$; 4*) $||4x + 7| - 11| < 4$.

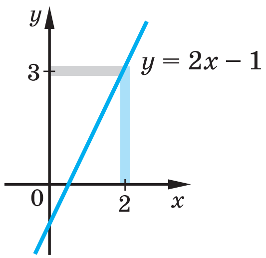
§2 ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ В ТОЧЦІ ТА НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ

Таблиця 2

1. Поняття границі функції в точці

Нехай задано деяку функцію, наприклад, $f(x) = 2x - 1$.

Розглянемо графік цієї функції та таблицю її значень у точках, які на числовій прямій розташовані достатньо близько до числа 2.

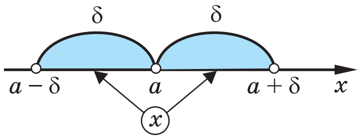
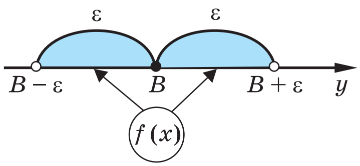


x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	2,8	2,98	2,998	3,002	3,02	3,2

З таблиці та графіка видно, що чим ближче аргумент x до числа 2 (це позначають $x \to 2$ і кажуть, що x *прямує до* 2), тим ближче значення функції $f(x) = 2x - 1$ до числа 3 (позначають $f(x) \to 3$ і кажуть, що $f(x)$ прямує до 3). Це записують також так: $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1) = 3$ (читається: «Ліміт $2x - 1$ при x, що прямує до 2, дорівнює 3») і кажуть, що границя функції $2x - 1$ при x, що прямує до 2 (або *границя функції в точці* 2), дорівнює 3.

У загальному випадку запис $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$ означає, що **при $x \to a$ $f(x) \to B$**, тобто B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли x прямує до a.

Продовж. табл. 2

<table>
<tr><td colspan="3">2. Запис позначень $x \to a$ і $f(x) \to B$ за допомогою знака модуля</td></tr>
<tr><td>Позначення і його зміст</td><td>Ілюстрація</td><td>Запис за допомогою знака модуля</td></tr>
<tr><td>$x \to a$
На числовій прямій точка x знаходиться від точки a на малій відстані (менше δ).</td><td>
</td><td>$|x - a| < \delta$*</td></tr>
<tr><td>$f(x) \to B$
Значення $f(x)$ на числовій прямій знаходиться на малій відстані від B (менше ε).</td><td>
</td><td>$|f(x) - B| < \varepsilon$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Означення границі функції в точці**</td></tr>
<tr><td>$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$</td><td colspan="2">Число B називається границею функції $f(x)$ у точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівності $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Властивості границі функції</td></tr>
<tr><td>Зміст правил граничного переходу</td><td colspan="2">Запис і формулювання правил граничного переходу</td></tr>
<tr><td>Якщо $f(x) = c$, то при $x \to a$ $f(x) \to c$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to a} c = c$
Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій.</td></tr>
<tr><td>Якщо при $x \to a$
$f(x) \to A$ і $g(x) \to B$, то:
$f(x) \pm g(x) \to A \pm B$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують.</td></tr>
<tr><td>$f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B$</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.</td></tr>
</table>

* Якщо значення x задовольняє нерівності $|x - a| < \delta$, то кажуть, що точка x знаходиться в δ-околі точки a.

** Означення є обов'язковим тільки для класів фізико-математичного профілю.

Продовж. табл. 2

Зміст правил граничного переходу	Запис і формулювання правил граничного переходу
$c \cdot f(x) \to c \cdot A$	$\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ***Сталий множник можна виносити за знак границі.***
$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}$ (де $B \neq 0$)	$\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ $\left(\text{де} \lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0\right)$ ***Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.***
5. Неперервність функції в точці	
Означення. *Функція $f(x)$ називається* ***неперервною в точці a****, якщо при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$,* тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.	
Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку I, то її називають ***неперервною на проміжку I***.	
Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то **сума, добуток і частка неперервних в точці *a* функцій неперервні в точці *a*** (*частка у випадку, коли дільник $g(a) \neq 0$*).	
Графік функції, неперервної на проміжку, — нерозривна лінія на цьому проміжку.	
Всі елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення, тому на кожному проміжку з області визначення їх графіки — нерозривні лінії.*	
Якщо на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то вона на цьому інтервалі зберігає сталий знак.	

* Елементарними функціями звичайно називають функції: $y = c$ ($c = const$); $y = x^n$, $n \in N$; $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$; $y = a^x$ ($a > 0$); $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$); $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \text{tg}\, x$; $y = \text{ctg}\, x$; $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \text{arctg}\, x$; $y = \text{arcctg}\, x$ і всі функції, які одержуються з перелічених вище за допомогою скінченної кількості дій додавання, віднімання, множення, ділення та утворення складеної функції (функції від функції).

Продовж. табл. 2

<table>
<tr><th colspan="2">6. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)</th></tr>
<tr><th>План</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>

1. Знайти ОДЗ нерівності.

2. Знайти нулі функції:
$$f(x) = 0.$$

3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.

4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.

</td><td>

Розв'яжіть нерівність $\dfrac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2} < 0.$

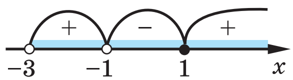
▶ Нехай $f(x) = \dfrac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2}$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна на кожному з проміжків своєї області визначення (як частка двох неперервних функцій), то можна використати метод інтервалів.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x+3>0, \\ x+5 \geqslant 0, \\ \sqrt{x+5}-2 \neq 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x>-3, \\ x \geqslant -5, \\ \sqrt{x+5} \neq 2. \end{cases}$ Тоді $\begin{cases} x>-3, \\ x \neq -1. \end{cases}$

2. Нулі функції: $f(x) = 0$.

$\dfrac{\log_2(x+3)-2}{\sqrt{x+5}-2} = 0,$ $\log_2(x+3)-2=0,$

$\log_2(x+3)=2$, $x+3=2^2$, $x=1$ (входить до ОДЗ).

3. 

Відповідь: $(-1; 1)$. ◁

</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття границі функції в точці. Найпростіше уявлення про границю функції можна одержати, розглядаючи графік функції $y = 2x - 1$ (рис. 8). З цього графіка видно: чим ближче вибираються на осі Ox значення аргументу до числа 2 (це позначається $x \to 2$ і читається: «x прямує до 2»), тим ближче на осі Oy буде значення $f(x)$ до числа 3.

Це можна записати так:

$$f(x) \to 3 \text{ при } x \to 2, \text{ або } \lim_{x \to 2}(2x-1) = 3.$$

Знак lim (читається: «Ліміт») — скорочений запис латинського слова *limes* (лімес), що в перекладі означає «границя».

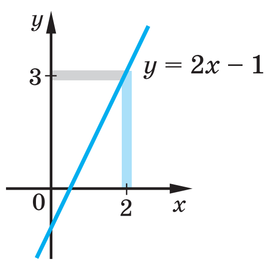


Рис. 8

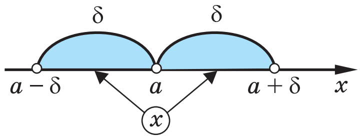


Рис. 9

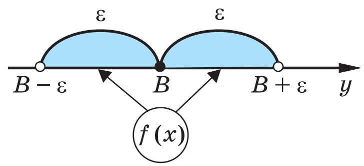


Рис. 10

У загальному випадку **запис $\lim_{x \to a} f(x) = B$ означає, що при $x \to a$ значення $f(x) \to B$**, тобто B — число, до якого прямує значення функції $f(x)$, коли x прямує до a.

Щоб дати означення границі функції $f(x)$ у точці a, згадаємо, що відстань між точками x і a на координатній осі Ox — це модуль різниці $|x - a|$, а відстань між точками $f(x)$ і B на координатній осі Oy — це модуль різниці $|f(x) - B|$.

Тоді запис $x \to a$ означає, що на числовій прямій точка x знаходиться від точки a на малій відстані — наприклад, менше якогось додатного числа δ (рис. 9). Це можна записати так: $|x - a| < \delta$. Зауважимо, що запис $x \to a$ означає, що x прямує до a, але не обов'язково x досягає значення a, тому в означенні границі функції в точці a розглядаються значення $x \neq a$. Також зауважимо, що в тому випадку, коли значення x задовольняє нерівності $|x - a| < \delta$, кажуть, що точка x знаходиться в *δ-околі точки a*.

Аналогічно запис $f(x) \to B$ означає, що значення $f(x)$ на числовій прямій знаходиться на малій відстані від B — наприклад, менше якогось додатного числа ε (рис. 10). Це можна записати так: $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Тоді можна дати таке означення границі функції в точці:
число B називається границею функції $f(x)$ у точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівності $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.

Знаходження числа B за функцією f називають *граничним переходом*. При виконанні граничних переходів можна користуватися такими правилами*:

Якщо нам відомі границі функцій $f(x)$ і $g(x)$, то для виконання граничного переходу над сумою, добутком або часткою цих функцій достатньо виконати відповідні операції над границями цих функцій (для частки, звичайно, тільки в тому випадку, коли границя знаменника не дорівнює нулю).

Тобто якщо **при $x \to a$ $f(x) \to A$ і $g(x) \to B$**, то

$$\boxed{f(x) + g(x) \to A + B} \quad \boxed{f(x) \cdot g(x) \to A \cdot B} \quad \boxed{\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{A}{B}} \quad (\text{де } B \neq 0).$$

* Обґрунтування правил граничного переходу наведено в § 7, там же наведено приклади використання означення для доведення того, що число B є границею функції $f(x)$ при $x \to a$.

Відзначимо також, що у випадку, коли функція $f(x)$ є постійною, тобто $f(x)=c$, то при всіх значеннях x значення $f(x)$ дорівнює c, отже, і при $x \to a$ значення $f(x) \to c$. Тобто *границя постійної дорівнює цій самій постійній*.

Зауважимо, що згідно з означенням границю функції $f(x)$, коли x прямує до a, можна обчислювати і в тому випадку, коли значення $x = a$ не входить до області визначення функції $f(x)$. Наприклад, областю визначення функції $f(x)=\frac{x}{x}$ є всі дійсні числа, крім числа 0. Для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $\frac{x}{x}=1$. Тоді при $x \to 0$ значення $\frac{x}{x} \to 1$, тобто $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$.

2. Поняття неперервності функції. Якщо значення $x = a$ входить до області визначення функції $f(x)$, то для багатьох функцій при $x \to a$ значення $f(x) \to f(a)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. Такі функції називаються *неперервними в точці* a*. Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку I, то її називають неперервною на проміжку I. Графіки неперервних функцій зображаються неперервними (нерозривними) кривими на кожному проміжку, що цілком входить до області визначення. На цьому і ґрунтується спосіб побудови графіків «за точками», яким ми постійно користувалися. Строго кажучи, при цьому треба попередньо з'ясувати, чи дійсно функція, що розглядається, неперервна. Усі відомі вам елементарні функції неперервні в кожній точці своєї області визначення (див. також § 8), і це можна використовувати при побудові графіків та при обчисленні границь функцій.

Наприклад, оскільки многочлен є неперервною функцією, то

$$\lim_{x\to 2}(x^3-3x+1)=f(2)=2^3-3\cdot 2+1=3.$$

З правил граничного переходу випливає, що у випадку, коли ***функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a***, **сума, добуток і частка неперервних у точці a функцій неперервні в точці a** (частка $\frac{f(x)}{g(x)}$ у випадку, коли $g(a) \neq 0$).

Наприклад, функція $f(x)=x^2+\sqrt[3]{x}$ неперервна як сума двох неперервних функцій (дійсно, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}(x^2+\sqrt[3]{x})=\lim\limits_{x\to a}x^2+\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=a^2+\sqrt[3]{a}=f(a)$, а це й означає, що функція $f(x)$ — неперервна).

Відзначимо ще одну важливу властивість неперервних функцій, повне доведення якої наводиться в курсах математичного аналізу.

Якщо на інтервалі (a, b) функція $f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то вона на цьому інтервалі зберігає сталий знак.

---

* Якщо в точці $x = a$ не виконується умова $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$, то функція $f(x)$ називається розривною в точці a (а сама точка a називається точкою розриву функції $f(x)$).

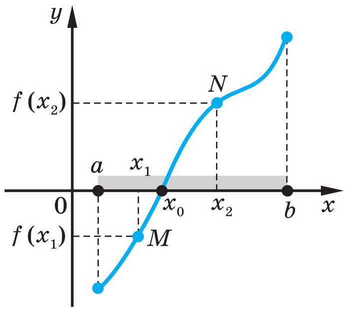


Рис. 11

Ця властивість має просту наочну ілюстрацію. Припустимо, що функція $f(x)$ на заданому інтервалі змінила свій знак (наприклад, з «−» на «+»). Це означає, що в якійсь точці x_1 значення функції від'ємне ($f(x_1) < 0$) — і тоді відповідна точка M графіка функції знаходиться нижче осі Ox. У деякій точці x_2 значення функції додатне ($f(x_2) > 0$), і відповідна точка N графіка знаходиться вище осі $0x$.

Але якщо графік функції (який є неперервною лінією) перейшов з нижньої півплощини відносно осі Ox у верхню, то він обов'язково хоча б один раз на заданому інтервалі перетнув вісь Ox, наприклад, у точці x_0 (рис. 11). Тоді $f(x_0) = 0$, що суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне, і на заданому інтервалі функція не може змінити свій знак.

На останній властивості неперервних функцій ґрунтується *метод інтервалів* розв'язування нерівностей з однією змінною, який ми використовували ще в 10 класі.

Дійсно, якщо функція f неперервна на інтервалі I і перетворюється на нуль у скінченному числі точок цього інтервалу, то за сформульованою вище властивістю неперервних функцій інтервал I розбивається цими точками на інтервали, у кожному з яких неперервна функція f зберігає сталий знак. Щоб визначити цей знак, достатньо обчислити значення функції f у будь-якій одній точці кожного з таких інтервалів.

Схема розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$ методом інтервалів наведена в підручнику 10 класу (с. 237) та в пункті 6 таблиці 2.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Чи є функція неперервною в кожній точці даного проміжку:
1) $f(x) = x^5 - 3x^2 + 2$, $(-\infty; +\infty)$;

2) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$, $[5; +\infty)$; 3) $g(x) = \dfrac{x^3 - x}{2x - 6}$. $(0; +\infty)$?

Розв'язання

▶ 1) Областю визначення функції $f(x)$ є множина всіх дійсних чисел. Многочлен є неперервною функцією в кожній точці своєї області визначення, тому в кожній точці проміжку $(-\infty; +\infty)$ функція $f(x)$ неперервна.

Коментар

Многочлен $f(x)$ і дробово-раціональна функція $g(x)$ є неперервними в кожній точці їх області визначення (зокрема, $g(x)$ неперервна функція як частка двох многочленів — неперервних функцій, за умови, що знаменник дробу не дорівнює нулю).

2), 3) Область визначення функції $g(x)$: $x \neq 3$, тобто

$$D(g) = (-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty).$$

Дробово-раціональна функція $g(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення.

Проміжок $[5;\ +\infty)$ повністю входить до області визначення цієї функції, тому в кожній точці проміжку $[5;+\infty)$ функція $g(x)$ неперервна.

Проміжок $(0;\ +\infty)$ містить точку 3, яка не входить до області визначення функції $g(x)$. Отже, у цій точці функція $g(x)$ не може бути неперервною (не існує значення $g(3)$), тому функція $g(x)$ не є неперервною в кожній точці проміжку $(0;\ +\infty)$. ◁

Тому в кожному із завдань потрібно знайти область визначення заданої функції і порівняти її із заданим проміжком.

Якщо цей проміжок повністю входить до області визначення відповідної функції, то ця функція буде неперервною в кожній точці заданого проміжку, а якщо ні, то функція не буде неперервною в тих точках, які не входять до області визначення цієї функції.

Приклад 2 З'ясуйте, до якого числа прямує функція $f(x) = \frac{x^2-1}{x-5}$ при $x \to 0$.

Розв'язання

▶ Дробово-раціональна функція $f(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення ($x \neq 5$). Число 0 входить до області визначення цієї функції, тому при $x \to 0$ значення

$$f(x) \to f(0) = \frac{0^2-1}{0-5} = \frac{1}{5}.$$

Відповідь: $\frac{1}{5}$. ◁

Коментар

Фактично в умові задачі говориться про знаходження границі функції $f(x)$ при $x \to 0$. Враховуючи, що дробово-раціональна функція $f(x)$ є неперервною в кожній точці її області визначення: $x \neq 5$ (як частка двох неперервних функцій — многочленів), одержуємо, що при $x \to 0$ значення $f(x) \to f(0)$. Тобто $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

Приклад 3* Знайдіть: 1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x-1)$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x-5}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

Розв'язання

▶ 1) Многочлен $f(x) = x^3 + 2x - 1$ є неперервною функцією в кожній точці числової прямої, тому $\lim\limits_{x\to 3}(x^3+2x-1) = f(3) = 3^3 + 2\cdot 3 - 1 = 32$;

Коментар

Многочлени і дробово-раціональні функції є неперервними в кожній точці їх областей визначення. Це означає, що в тому випадку,

2) Дробово-раціональна функція $f(x)=\frac{x^2-9}{x-5}$ є неперервною в кожній точці її області визначення ($x \neq 5$). Число 1 входить до області визначення цієї функції, тому

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-9}{x-5}=f(1)=\frac{1^2-9}{1-5}=2;$$

3) При $x \neq 1$

$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1=\varphi(x)$. Тоді

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=$$
$$=\varphi(1)=1+1=2. \quad \triangleleft$$

коли число a (до якого прямує x) входить до області визначення функції $f(x)$ (завдання 1 і 2), одержуємо: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Якщо ж число a не входить до області визначення функції $f(x)$ (завдання 3), то пробуємо при $x \neq a$ виконати тотожні перетворення виразу $f(x)$, одержати функцію, означену при $x = a$, і використати неперервність останньої функції при $x = a$ (для завдання 3 це функція $\varphi(x) = x + 1$ при $x = 1$).

Нагадаємо, що позначення $x \to a$ означає тільки те, що x прямує до a (але не обов'язково x приймає значення a), і тому при $x \to 1$ значення

$$x + 1 \to 1 + 1 = 2.$$

Приклад 4* Розв'яжіть нерівність $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)} \geqslant 1.$

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)}-1 \geqslant 0.$

Оскільки функція

$f(x)=\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)}-1$ неперервна в кожному проміжку своєї області визначення, то можна використати метод інтервалів.

1. ОДЗ. Оскільки $x^2 + 3 > 0$ завжди, то ОДЗ задається умовами:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3\neq 1, \\ x+5>0, \\ \log_{x+3}(x+5)\neq 0. \end{cases} \quad \text{Тоді} \quad \begin{cases} x>-3, \\ x\neq -2, \\ x>-5, \\ x+5\neq 1. \end{cases}$$

Тобто $x > -3$, $x \neq -2$.

Коментар

Задану нерівність можна розв'язувати або за допомогою рівносильних перетворень, або методом інтервалів. Якщо ми виберемо метод інтервалів, то спочатку нерівність необхідно звести до виду $f(x) \geqslant 0$.

Для того щоб розв'язати нерівність методом інтервалів, достатньо впевнитися, що функція $f(x)$ неперервна (ця вимога завжди виконується для всіх елементарних функцій $f(x)$), і використати відому схему такого розв'язування:

1) *Знайти ОДЗ нерівності.*
2) *Знайти нулі функції:* $f(x) = 0$.
3) *Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.*

2. Нулі $f(x)$: $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)}-1=0$. На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянням:
   $\log_{x+3}(x^2+3)=\log_{x+3}(x+5)$,
   $x^2+3=x+5$, $x^2-x-2=0$,
   $x_1=-1$, $x_2=2$ (обидва корені входять до ОДЗ).
3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ і знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (рис. 12).

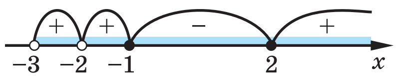


Рис. 12

4. *Відповідь*:
   $(-3;-2)\cup(-2;-1]\cup[2;+\infty)$. ◁

4) *Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.*

При знаходженні нулів $f(x)$ можна стежити за рівносильністю виконаних (на ОДЗ) перетворень одержаного рівняння, а можна використовувати рівняння-наслідки, а в кінці виконати перевірку знайдених коренів.

Записуючи відповідь до нестрогої нерівності, слід враховувати, що всі нулі функції повинні ввійти до відповіді (у даному випадку — числа -1 і 2).

Щоб знайти знак функції $f(x)$ у кожному з одержаних проміжків, достатньо порівняти величину дробу $\frac{\log_{x+3}(x^2+3)}{\log_{x+3}(x+5)}$ з одиницею в будь-якій точці з вибраного проміжку. (Для цього можна використати графік функції $y=\log_a t$ при $a>1$ та при $0<a<1$.)

Запитання для контролю

1. Поясніть, що означають записи $x\to a$ і $f(x)\to B$.
2. Поясніть, що означає запис $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.
3. Якщо при $x\to a$ $f(x)\to A$ і $g(x)\to B$, то до яких чисел при $x\to a$ будуть прямувати функції: $f(x)\pm g(x)$; $f(x)\cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ (якщо $B\neq 0$)?
4. Коли функція $f(x)$ називається неперервною в точці a? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається неперервною на проміжку? Що можна сказати про графік такої функції на розглянутому проміжку?
6. На якій властивості неперервної функції ґрунтується метод інтервалів розв'язування нерівностей виду $f(x)\gtrless 0$? Поясніть, спираючись на графічну ілюстрацію, справедливість цієї властивості.
7. Охарактеризуйте план розв'язування нерівності виду $f(x)\gtrless 0$ методом інтервалів. Наведіть приклад розв'язування нерівності методом інтервалів.

Вправи

1°. Чи є неперервною в кожній із точок $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$ функція, графік якої зображено на рисунку 13?

2. Чи є функція неперервною в кожній точці даного проміжку:

1) $f(x) = x^2 - 3x$, $(-\infty; +\infty)$; 2) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$, $(0; +\infty)$;

3) $f(x) = \dfrac{x - 3}{x - 1}$, $[2; +\infty)$?

3. З'ясуйте, до якого числа прямує функція f, якщо:

1) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ при $x \to 1$; 2) $f(x) = \dfrac{2x + 5}{x^3 - 7}$ при $x \to 2$;

3) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^3}$ при $x \to -1$; 4) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - x}$ при $x \to 3$.

4*. Знайдіть:

1) $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + x + 5)$; 2) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 2x}{4x + 1}$; 3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$; 4) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$.

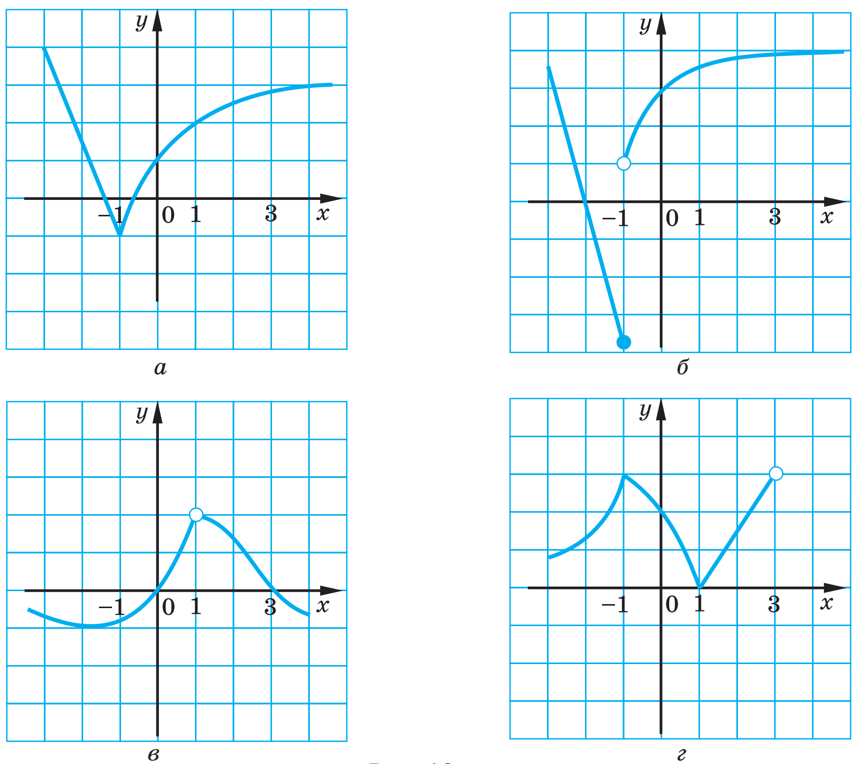


Рис. 13

5. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

1) $(x^2-4)\log_{\frac{1}{2}} x \leqslant 0$; 2) $\dfrac{2^x-1}{2x-1} > 0$; 3) $\dfrac{3x^2-2x-1}{\log_3(x-1)} < 0$; 4) $\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x^2-16} \geqslant 0$.

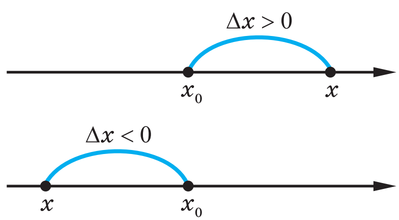
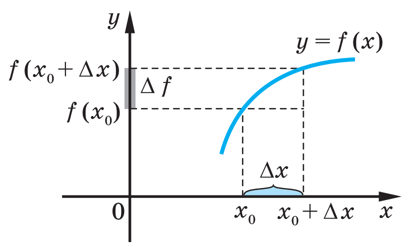
6. Знайдіть область визначення функції:

1) $y=\sqrt{\dfrac{\log_3(x+1)}{x-1}}$; 2) $y=\log_5\left(x-\sqrt{2x-1}\right)$;

3) $y=\sqrt{(x^4-4x^2+3)|2x-3|}$; 4) $y=\left(\dfrac{\log_{0,4}(x-1)}{2-x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

§3 ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ, ЇЇ МЕХАНІЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

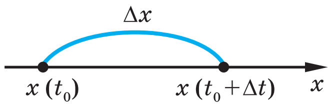
Таблиця 3

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття приросту аргументу і приросту функції в точці x_0</td></tr>
<tr><td colspan="2">Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$</td></tr>
<tr><td>Приріст аргументу</td><td>Приріст функції</td></tr>
<tr><td>$\Delta x = x - x_0$
</td><td>$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Запис неперервності функції через прирости аргументу і функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функція $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли малій зміні аргументу в точці x_0 відповідають малі зміни значень функції, тобто
Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 $\Leftrightarrow$ При $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 3

3. Задачі, які приводять до поняття похідної

I. Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої

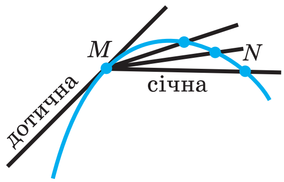


$x(t)$ — координата x точки в момент часу t

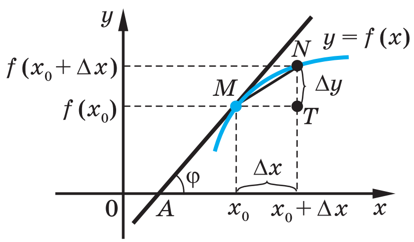
$$v_{\text{середня}} = \frac{x(t_0+\Delta t)-x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

$$\boxed{v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}\,.$$

II. Дотична до графіка функції



Дотичною до кривої в даній точці M називається граничне положення січної MN.



Коли точка N наближається до точки M (рухаючись по графіку функції $y=f\,(x)$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox.

Оскільки $\operatorname{tg}\angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

4. Означення похідної

$$y = f\,(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\boxed{y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}$$

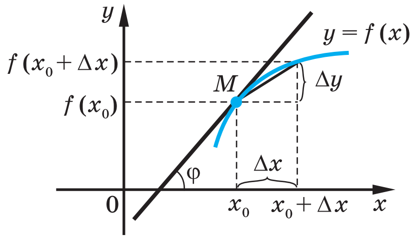
Похідною функції $y=f\,(x)$ у точці x_0 **називається границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.**

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

5. Похідні деяких елементарних функцій

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^2)' = 2x$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

Продовж. табл. 3

<table>
<tr><td colspan="2">6. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$</td></tr>
<tr><td>
$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\varphi$
k — кутовий коефіцієнт дотичної
$\boxed{k = \mathrm{tg}\,\varphi = f'(x_0)}$
$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — **рівняння дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0</td><td>**Значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної.**
(*Кут відлічується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки.*)</td></tr>
<tr><td colspan="2">7. Механічний зміст похідної</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу**</td></tr>
<tr><td>$s = s(t)$ — залежність пройденого шляху від часу

$v = s'(t)$ — **швидкість** прямолінійного руху

$a = v'(t)$ — **прискорення** прямолінійного руху</td><td>Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин.*
Наприклад, **миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідна функції, яка виражає залежність пройденого шляху s від часу t.**</td></tr>
<tr><td colspan="2">8. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">*Якщо функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.*</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття приросту аргументу і приросту функції. Часто нас цікавить не значення якоїсь величини, а її приріст. Наприклад, сила пружності пружини пропорційна до видовження пружини; робота — це зміна енергії тощо.

Приріст аргументу чи функції традиційно позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта). Дамо означення приросту аргументу і приросту функції.

Нехай x — довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$.

Різниця $x - x_0$ називається *приростом незалежної змінної* (або *аргументу*) у точці x_0 і позначається Δx (читається: «Дельта ікс»). Отже,

$$\Delta x = x - x_0.$$

З цієї рівності маємо

$$x = x_0 + \Delta x, \tag{1}$$

тобто початкове значення аргументу x_0 дістало приріст Δx. Зауважимо, що при $\Delta x > 0$ значення x більше за x_0, а при $\Delta x < 0$ значення x менше за x_0 (рис. 14).

Тоді значення функції змінилося на величину $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Враховуючи рівність (1), одержуємо, що функція змінилася на величину

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \tag{2}$$

(рис. 15), яка **називається *приростом функції f* у точці x_0, що відповідає приросту аргументу Δx** (символ Δf читається: «Дельта еф»).

З рівності (2) одержуємо $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$.

Зауважимо, що при фіксованому x_0 приріст Δf є функцією від приросту Δx.

Якщо функція задається формулою $y = f(x)$, то Δf називають також приростом залежної змінної y і позначають через Δy.

Наприклад, якщо $y = f(x) = x^2$, то приріст Δy, що відповідає приросту Δx, дорівнює:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

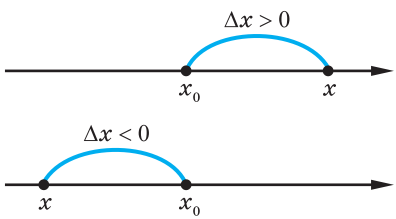


Рис. 14

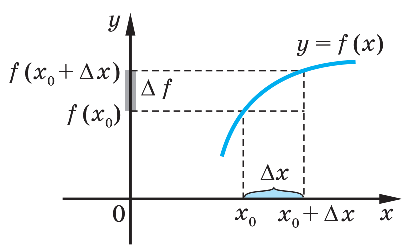


Рис. 15

2. Запис неперервності функції через приріст аргументу і функції. Нагадаємо, що функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0, якщо при $x \to x_0$ $f(x) \to f(x_0)$, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Але якщо $x \to x_0$, то $x - x_0 \to 0$, тобто $\Delta x \to 0$ (і навпаки, якщо $\Delta x \to 0$, то $x - x_0 \to 0$, тобто $x \to x_0$), отже, умова $x \to x_0$ еквівалентна умові $\Delta x \to 0$. Аналогічно, твердження $f(x) \to f(x_0)$ еквівалентне умові $f(x) - f(x_0) \to 0$, тобто $\Delta f \to 0$. Таким чином, *функція* $f(x)$ буде неперервною в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли при $\Delta x \to 0$ $\Delta f \to 0$, тобто *малій зміні аргументу в точці* x_0 *відповідають малі зміни значень функції*. Саме через цю властивість графіки неперервних функцій зображаються неперервними (нерозривними) кривими на кожному з проміжків, що цілком входить до області визначення.

3. Задачі, які приводять до поняття похідної.

I. Миттєва швидкість руху точки вздовж прямої. Розглянемо задачу, відому з курсу фізики, — рух матеріальної точки вздовж прямої. Нехай координата x точки в момент часу t дорівнює $x(t)$. Як і в курсі фізики, будемо вважати, що рух відбувається неперервно (як це ми спостерігаємо в реальному житті). Спробуємо за відомою залежністю $x(t)$ визначити швидкість, з якою рухається точка в момент часу t_0 (так звану миттєву швидкість). Розглянемо відрізок часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 16). Означимо середню швидкість на відрізку $[t_0; t_0 + \Delta t]$ як відношення пройденого шляху до тривалості руху:

$$v_{\text{середня}} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Для визначення миттєвої швидкості точки в момент часу t_0 зробимо так, як ви робили на уроках фізики: візьмемо відрізок часу довжиною t, обчислимо середню швидкість на цьому відрізку і почнемо зменшувати відрізок Δt до нуля (тобто зменшувати відрізок $[t_0; t]$ і наближати t до t_0). Ми помітимо, що значення середньої швидкості при наближенні Δt до нуля буде наближатися до деякого числа, яке і вважається значенням швидкості в момент часу t_0. Іншими словами, *миттєвою швидкістю* в момент часу t_0 називається границя відношення $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

$$\boxed{v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.}$$

Наприклад, розглянемо вільне падіння тіла. З курсу фізики відомо, що в цьому випадку залежність шляху від часу задається формулою $s(t) = \frac{gt^2}{2}$.

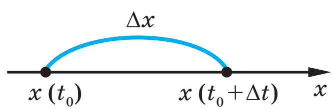


Рис. 16

1) Знайдемо спочатку Δs:

$$\Delta s = s(t_0+\Delta t)-s(t_0)=\frac{g(t_0+\Delta t)^2}{2}-\frac{gt_0^2}{2}=\frac{g(t_0^2+2t_0\Delta t+(\Delta t)^2-t_0^2)}{2}=\frac{g(2t_0\Delta t+(\Delta t)^2)}{2}.$$

2) Знайдемо середню швидкість: $v_{\text{середня}}(t_0)=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{g(2t_0\Delta t+(\Delta t)^2)}{2\Delta t}=gt_0+\frac{g\Delta t}{2}.$

3) З'ясуємо, до якого числа прямує відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$: це і буде миттєва швидкість у момент часу t_0.

Якщо $\Delta t\to 0$, то $\frac{g\Delta t}{2}=\frac{g}{2}\cdot\Delta t\to 0$, а оскільки величина gt_0 стала, то $gt_0+\frac{g\Delta t}{2}\to gt_0$. Останнє число і є значенням миттєвої швидкості в точці t_0.

Ми отримали відому з фізики формулу $v = gt$ (тоді $v(t_0)=gt_0$). Використовуючи поняття границі, це можна записати так: $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=gt_0$.

II. Дотична до графіка функції. Наочне уявлення про дотичну до кривої можна отримати, виготовивши криву з цупкого матеріалу (наприклад, з дроту) і прикладаючи до кривої лінійку у вибраній точці (рис. 17). Якщо ми зобразимо криву на папері, а потім будемо вирізати фігуру, обмежену цією кривою, то ножиці теж будуть напрямлені по дотичній до кривої.

Спробуємо перекласти наочне уявлення про дотичну на більш точну мову.

Нехай задана деяка крива і точка M на ній (рис. 18). Візьмемо на цій прямій іншу точку N і проведемо пряму через точки M і N. Цю пряму звичайно називають *січною*. Почнемо наближати точку N до точки M. Положення січної MN буде змінюватися, але при наближенні точки N до точки M воно почне стабілізуватися.

Дотичною **до кривої в даній точці M називається граничне положення січної MN.**

Щоб записати це означення за допомогою формул, будемо вважати, що крива — це графік функції $y = f(x)$, а точка M, яка знаходиться на графіку,

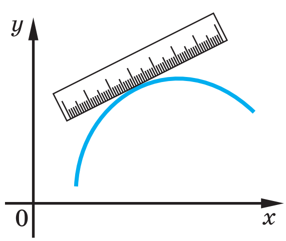


Рис. 17

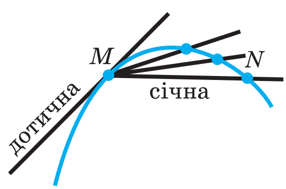


Рис. 18

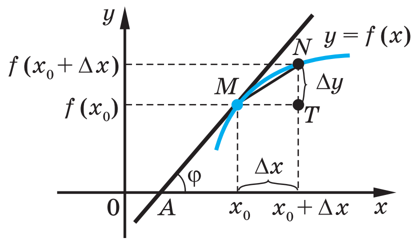


Рис. 19

задана своїми координатами $(x_0;\ y_0) = (x_0;\ f(x_0))$. Дотичною є деяка пряма, яка проходить через точку M (рис. 19).

Щоб побудувати цю пряму, достатньо знати кут φ нахилу дотичної* до осі Ox.

Нехай точка N (через яку проходить січна MN) має абсцису $x_0 + \Delta x$. Коли точка N, рухаючись по графіку функції $y = f(x)$, наближається до точки M (це буде при $\Delta x \to 0$), то величина кута NMT наближається до величини кута φ нахилу дотичної MA до осі Ox. Оскільки $\operatorname{tg} \angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x \to 0$ значення $\operatorname{tg} \angle NMT$ наближається до $\operatorname{tg} \varphi$, тобто

$$\boxed{\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Фактично ми прийшли до тієї самої задачі, яка зустрічалася при знаходженні миттєвої швидкості: знайти границю відношення виразу виду $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (де $y = f(x)$ — задана функція) при $\Delta x \to 0$. Знайдене таким чином число називають *похідною* функції $y = f(x)$ у точці x_0.

4. Означення похідної.

***Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0* називається границя відношення приросту функції в точці x_0 до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.**

Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначається $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$) і читається: «Еф штрих у точці x_0». Коротко означення похідної функції $y = f(x)$ можна записати так:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Враховуючи означення приросту функції $y = f(x)$ у точці x_0, що відповідає приросту Δx, означення похідної можна записати також так:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцію $f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають *диференційовною* в цій точці. Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що ця функція *диференційовна на цьому проміжку*. Операція знаходження похідної називається *диференціюванням*.

---

* Будемо розглядати невертикальну дотичну (тобто $\varphi \neq 90°$).

Для знаходження похідної функції $y = f(x)$ за означенням можна користуватися такою *схемою*:

1. *Знайти приріст функції* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, *який відповідає приросту аргументу* Δx.
2. *Знайти відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. *З'ясувати, до якої границі прямує відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$.

   Це і буде похідна заданої функції.

5. Похідні деяких елементарних функцій. Обґрунтуємо, користуючись запропонованою схемою, формули, наведені в пункті 5 таблиці 3.

1. Обчислимо похідну функції $y = c$ (тобто $f(x) = c$), де c — стала.

1) Знайдемо приріст функції, який відповідає приросту аргументу Δx:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0.$$

2) Знайдемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює нулю, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює нулю. Отже, $y' = 0$, тобто

$$c' = 0.$$

2. Обчислимо похідну функції $y = x$ (тобто $f(x) = x$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Оскільки відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює 1, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює одиниці. Отже, $y' = 1$, тобто

$$x' = 1.$$

3. Обчислимо похідну функції $y = x^2$ (тобто $f(x) = x^2$).

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 =$

$$= 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

3) При $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \to 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0) = 2x_0$. Тоді похідна функції $y = x^2$ у довільній точці x дорівнює: $y'(x) = 2x$. Отже,

$$(x^2)' = 2x.$$

4. Обчислимо похідну функції $y=\frac{1}{x}$ (тобто $f(x)=\frac{1}{x}$).

1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}=\frac{x_0-(x_0+\Delta x)}{(x_0+\Delta x)x_0}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-\Delta x}{(x_0+\Delta x)x_0\cdot\Delta x}=\frac{-1}{(x_0+\Delta x)x_0}$.

3) При $\Delta x\to 0$ значення $x_0+\Delta x\to x_0$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{-1}{x_0\cdot x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$. Це означає, що $y'(x_0)=-\frac{1}{x_0^2}$. Тоді похідна функції $y=\frac{1}{x}$ у довільній точці x з її області визначення (тобто при $x\neq 0$) дорівнює: $y'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Отже,

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

5. Обчислимо похідну функції $y=\sqrt{x}$ (тобто $f(x)=\sqrt{x}$).

1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}$. Помножимо і поділимо одержаний вираз на суму $\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}$ і запишемо Δy так:

$$\Delta y=\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{\Delta x}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}.$$

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x}{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)\cdot\Delta x}=\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$.

3) При $\Delta x\to 0$ значення $x_0+\Delta x\to x_0$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{1}{\sqrt{x_0}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Це означає, що $y'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (звичайно, при $x_0\neq 0$). Тоді похідна функції $y=\sqrt{x}$ у довільній точці x з її області визначення, крім $x=0$ (тобто при $x>0$), дорівнює: $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Отже,

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$. Враховуючи означення похідної функції $y=f(x)$, запишемо результати, одержані при розгляді дотичної до графіка функції (с. 35).

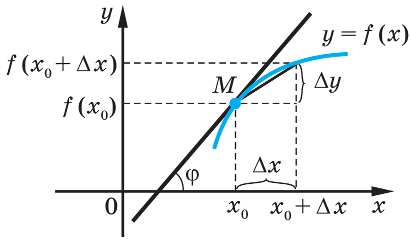


Рис. 20

Як було обґрунтовано вище, тангенс кута φ нахилу дотичної в точці M з абсцисою x_0 (рис. 20) обчислюється за формулою $\operatorname{tg}\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. З іншого боку, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тоді

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi.$$

Нагадаємо, що в рівнянні прямої $y = kx + b$ кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі Ox (кут відлічується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки). Отже, якщо k — кутовий коефіцієнт дотичної, то $k = \operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Тобто

значення похідної в точці x_0 дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0 і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної

(*кут відлічується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки*).

Таким чином, якщо $y = kx + b$ — рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці M з абсцисою x_0 (і ординатою $f(x_0)$), то $k = f'(x_0)$. Тоді рівняння дотичної можна записати так: $y = f'(x_0)\cdot x + b$. Щоб знайти значення b, врахуємо, що ця дотична проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати точки M задовольняють останньому рівнянню, тобто $f(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$. Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$, і рівняння дотичної матиме вигляд:

$y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$. Його зручно записати так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Це рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.

З а у в а ж е н н я. Кут φ, який утворює невертикальна дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 з додатнім напрямком осі Ox, може бути нульовим, гострим або тупим. Враховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що *у випадку, коли* $f'(x_0) > 0$ (тобто $\operatorname{tg}\varphi > 0$), кут φ буде гострим, *а у випадку, коли* $f'(x_0) < 0$ (тобто $\operatorname{tg}\varphi < 0$), кут φ буде тупим. *Якщо* $f'(x_0) = 0$ (тобто $\operatorname{tg}\varphi = 0$), то $\varphi = 0$ (тобто *дотична паралельна осі Ox або співпадає з нею*). І навпаки, *якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 утворює з додатним напрямком осі Ox гострий кут φ, то* $f'(x_0) > 0$, *якщо тупий кут* — то $f'(x_0) < 0$, *а якщо дотична паралельна осі Ox або співпадає з нею* ($\varphi = 0$), то $f'(x_0) = 0$.

Якщо ж дотична утворює з віссю Ox прямий кут ($\varphi = 90^\circ$), *то функція $f(x)$ похідної в точці x_0 не має* ($\operatorname{tg} 90^\circ$ не існує).

7. Механічний зміст похідної. Записуючи означення похідної в точці t_0 для функції $x(t)$:

$$x'(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

і співставляючи одержаний результат з поняттям миттєвої швидкості прямолінійного руху:

$$v_{\text{миттєва}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

можна зробити висновок, що *похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу*.

Зокрема, *похідна за часом є мірою швидкості зміни відповідної функції, що може застосовуватися до найрізноманітніших фізичних величин*. Наприклад, миттєва швидкість v нерівномірного прямолінійного руху є похідна від функції, яка виражає залежність пройденого шляху s від часу t; прискорення a нерівномірного прямолінійного руху є похідна від функції, яка виражає залежність швидкості v від часу t.

Якщо $s = s\,(t)$ — залежність пройденого шляху від часу, то
$v = s'\,(t)$ — *швидкість* прямолінійного руху $(v = v\,(t))$;
$a = v'\,(t)$ — *прискорення* прямолінійного руху.

8. Зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.

Якщо функція $y = f\,(x)$ диференційовна в точці x_0, то в цій точці існує її похідна $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тобто при $\Delta x \to 0$ значення $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$.

Для обґрунтування неперервності функції $y = f\,(x)$ достатньо обґрунтувати, що при $\Delta x \to 0$ значення $\Delta y \to 0$.

Справді, при $\Delta x \to 0$ одержуємо: $\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$. А це й означає, що функція $y = f\,(x)$ — неперервна. Отже,

якщо функція $f\,(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона неперервна в цій точці.

З цього твердження випливає:

якщо функція $f\,(x)$ диференційовна на проміжку (тобто в кожній його точці), то вона неперервна на цьому проміжку.

Відзначимо, що *обернене твердження неправильне*. Функція, яка неперервна на проміжку, може не мати похідної в деяких точках цього проміжку.

Наприклад, функція $y = |\,x\,|$ (рис. 21) неперервна при всіх значеннях x, але вона не має похідної в точці $x = 0$. Дійсно, якщо $x_0 = 0$ і $y = f\,(x) = |\,x\,|$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{|\,0 + \Delta x\,| - |\,0\,|}{\Delta x} = \frac{|\,\Delta x\,|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \Delta x > 0, \\ -1, \text{ якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

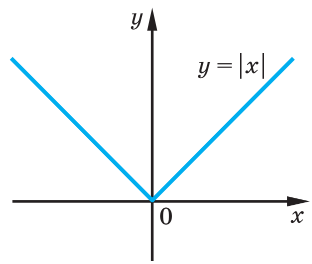


Рис. 21

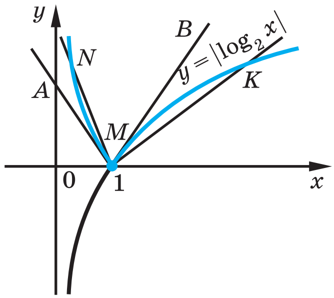


Рис. 22

Тому при $\Delta x \to 0$ відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ не має границі, а значить, і функція $y = |x|$ не має похідної в точці 0.

З а у в а ж е н н я. Той факт, що неперервна функція $f(x)$ не має похідної в точці x_0, означає, що до графіка цієї функції в точці з абсцисою x_0 не можна провести дотичної (або відповідна дотична перпендикулярна до осі Ox). Графік у цій точці матиме злом.

Наприклад, до графіка неперервної функції $y = |\log_2 x|$ (рис. 22) у точці M з абсцисою $x = 1$ не можна провести дотичну (а значить, ця функція не має похідної в точці 1). Дійсно, за означенням дотична — це граничне положення січної. Якщо точка N буде наближатися до точки M по лівій частині графіка, то січна MN займе граничне положення MA. Якщо ж точка K буде наближатися до точки M по правій частині графіка, то січна MK займе граничне положення MB. Але це дві різні прямі, отже, у точці M дотичної до графіка даної функції не існує.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть тангенс кута φ нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі Ox, якщо: 1) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$; 2) $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0 = 25$.

Р о з в ' я з а н н я

1) ▶ За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$. Враховуючи, що $f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$, одержуємо:

$$f'(x_0)=f'(1)=-\frac{1}{1^2}=-1.$$

Отже, $\operatorname{tg}\varphi = f'(1) = -1$. ◁

2) ▶ Оскільки $f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, то $f'(x_0)=f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}$. За геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)$.

Отже, $\operatorname{tg}\varphi = f'(25) = 0{,}1$. ◁

К о м е н т а р

За геометричним змістом похідної

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi,$$

де φ — кут нахилу дотичної, проведеної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, до осі Ox. Тому для знаходження tg φ достатньо знайти похідну функції $f(x)$, а потім знайти значення похідної в точці x_0.

Для знаходження похідних заданих функцій відзначимо, що відповідні похідні наведено в пункті 5 таблиці 3 (та обґрунтовано на с. 36–37). Тому надалі при розв'язуванні задач ми будемо використовувати ці формули як табличні значення.

Приклад 2 Використовуючи формулу $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \frac{1}{x}$ у точці з абсцисою $x_0 = \frac{1}{2}$.

Розв'язання

► Якщо $f(x) = \frac{1}{x}$, то $f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$. Тоді $f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, одержуємо $y = 2 - 4\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Тобто $y = -4x + 4$ — шукане рівняння дотичної. ◁

Коментар

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записується так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти значення $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання відповідних обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$ та використати табличне значення похідної:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Запитання для контролю

1. Поясніть на прикладах і дайте означення приросту аргументу і приросту функції в точці x_0.
2. а) Охарактеризуйте поняття неперервності функції в точці, користуючись поняттями приросту аргументу і функції. б*) Обґрунтуйте запис неперервності функції в точці через приріст аргументу і функції.
3. Поясніть, як можна обчислити миттєву швидкість точки при русі точки вздовж прямої.
4. Поясніть, яка пряма вважається дотичною до графіка функції.
5. Як обчислити тангенс кута нахилу січної, що проходить через дві точки графіка деякої функції, до осі Ox?
6. Поясніть, як можна визначити тангенс кута φ — нахилу дотичної до осі Ox.
7. а) Дайте означення похідної. Як позначається похідна функції f у точці x_0? б*) Опишіть схему знаходження похідної функції $y = f(x)$.
8. а) Запишіть, чому дорівнює похідна функції:

   1) c (де c — стала); 2) x; 3) x^2; 4) $y = \frac{1}{x}$; 5) $y = \sqrt{x}$.

   б*) Обґрунтуйте формули для знаходження похідних функцій, наведених у пункті а).
9. Що таке похідна з геометричної точки зору?

10. Що таке похідна з механічної точки зору?
11. а) Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.
    б*) Обґрунтуйте рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0.
12. а) Поясніть зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.
    б*) Обґрунтуйте зв'язок між диференційовністю і неперервністю функції.

Вправи

1°. Для функції $y = 2x$ знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргументу Δx у точці x_0, якщо:
1) $x_0 = 2$ і $\Delta x = 3$; 2) $x_0 = 1{,}5$ і $\Delta x = 3{,}5$; 3) $x_0 = 0{,}5$ і $\Delta x = 2{,}5$.

2. Знайдіть приріст Δy, який відповідає приросту аргументу Δx у точці x_0 для функції:
1) $y = 3x$; 2) $y = x^3$; 3) $y = x^2 - x$; 4) $y = x + \frac{1}{x}$.

3. Закон руху точки по прямій задається формулою $x = x(t)$, де x — координата точки в момент часу t. Знайдіть:
а) середню швидкість руху точки на відрізку [2; 4];
б) миттєву швидкість руху точки при $t = 2$; якщо:
1) $x(t) = 3t + 4$; 2) $x(t) = -2t + 1$; 3) $x(t) = 5t - 7$; 4) $x(t) = -3t - 2$.

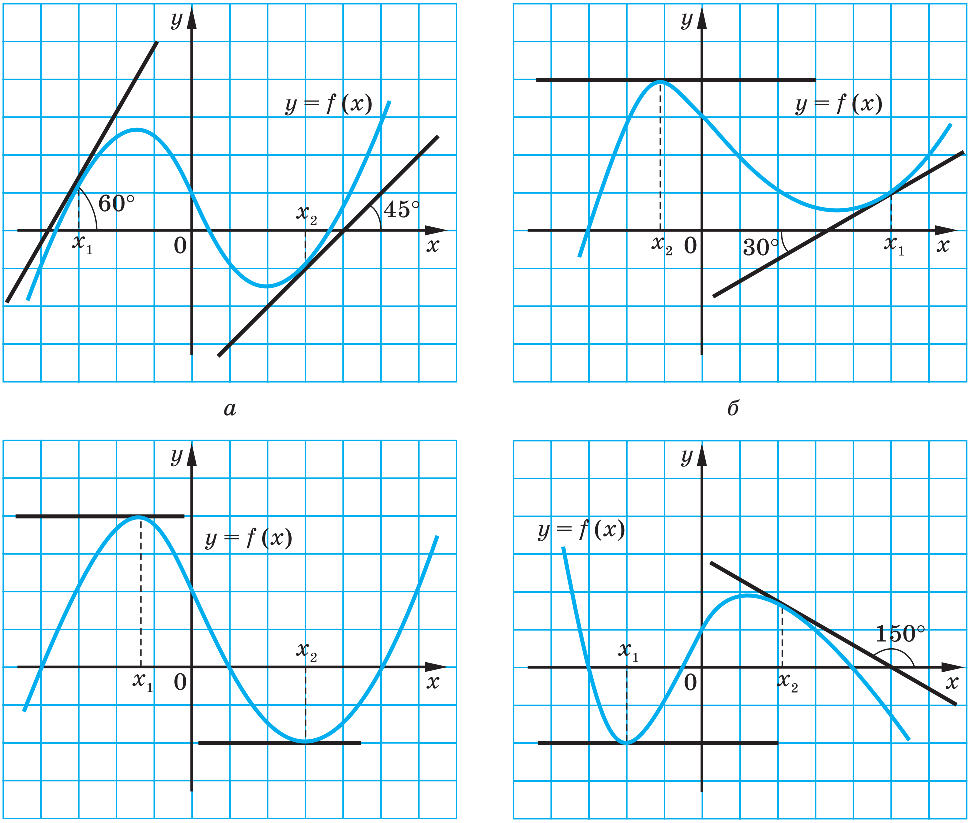
4. Користуючись схемою обчислення похідної, наведеною на с. 36, знайдіть похідну функції:
1) $y = 3x$; 2) $y = -5x$; 3*) $y = x^3$; 4*) $y = x^2 - 2x$.

5°. На рисунку 23 *а–г* зображено графік функції $y = f(x)$ та дотичні до нього в точках з абсцисами x_1 і x_2. Користуючись геометричним змістом похідної, запишіть значення $f'(x_1)$ і $f'(x_2)$.

6. Використовуючи формули, наведені в пункті 5 таблиці 3, та геометричний зміст похідної, запишіть кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $f(x) = x^2$, $x_0 = 3$; 2) $f(x) = x$, $x_0 = 8$;
3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; 4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

7. Використовуючи формулу $(x^2)' = 2x$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2$ у точці з абсцисою x_0, якщо:
1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0$; 3) $x_0 = 0{,}5$; 4) $x_0 = -3$.
Зобразіть графік даної функції та відповідну дотичну.

8. Використовуючи формулу $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = \sqrt{x}$ у точці з абсцисою x_0, якщо:



а *б* *в* *г*

Рис. 23

1) $x_0 = 1$; 2) $x_0 = 0{,}25$;
3) $x_0 = 4$; 4) $x_0 = 9$.

9. Використовуючи механічний зміст похідної, знайдіть швидкість тіла, яке рухається за законом $s = s(t)$, у момент часу t, якщо:
1) $s(t) = t$, $t = 7$; 2) $s(t) = t^2$, $t = 6{,}5$;
3) $s(t) = t^3$, $t = 5$; 4) $s(t) = \sqrt{t}$, $t = 4$.

10. Закон руху точки задано графіком залежності шляху s від часу t (рис. 24).
1) Знайдіть середню швидкість точки з моменту $t = 2$ до $t = 3$.

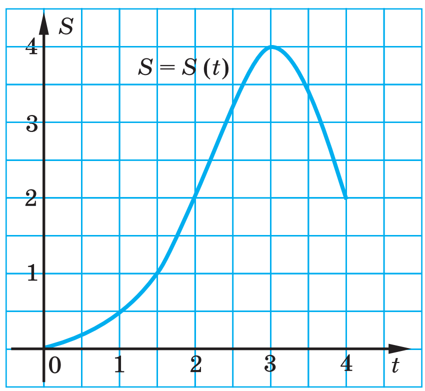


Рис. 24

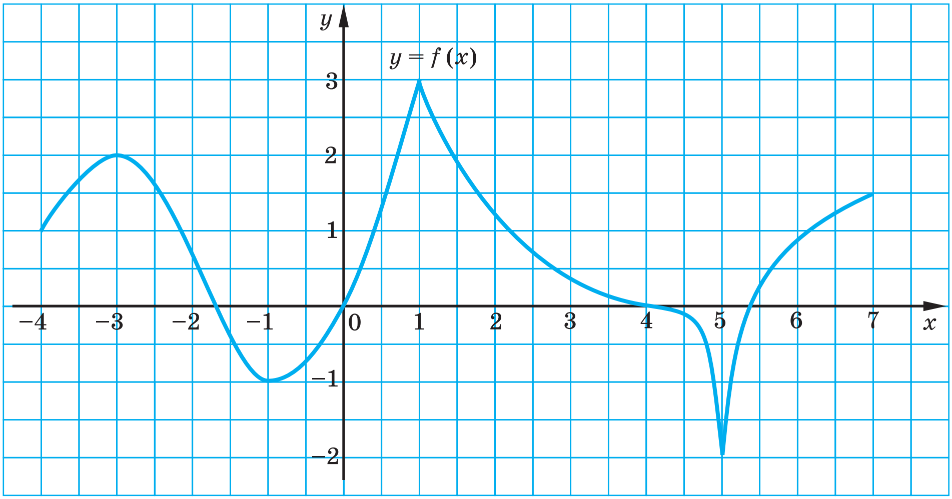


Рис. 25

2) Порівняйте швидкості точки в моменти часу $t_1 = 2$ і $t_2 = 3$.

3) Чи змінювала точка напрям руху? Якщо змінювала, то в який момент часу?

11. На рисунку 25 зображено графік функції $y = f(x)$ на проміжку $[-4; 7]$. Використовуючи геометричний зміст похідної, укажіть на проміжку $(-4; 7)$:

1) значення аргументу, у яких похідна $f'(x)$ дорівнює нулю.

2) значення аргументу, у яких похідна $f'(x)$ не існує. Чи існує в кожній точці з найденими абсцисами дотична до графіка функції $y = f(x)$?

3*) проміжки, у яких похідна $f'(x)$ додатна. Охарактеризуйте поведінку функції на кожному з цих проміжків.

4*) проміжки, у яких похідна $f'(x)$ від'ємна. Охарактеризуйте поведінку функції на кожному з цих проміжків.

§ 4 ПРАВИЛА ОБЧИСЛЕННЯ ПОХІДНИХ. ПОХІДНА СКЛАДЕНОЇ ФУНКЦІЇ

Таблиця 4

1. Похідні деяких елементарних функцій

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

2. Правила диференціювання

Правило	Приклад
$(cu)' = cu$ *Сталий множник можна виносити за знак похідної*	$(5x^3)' = 5(x^3)' = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$
$(u + v)' = u' + v'$ *Похідна суми диференційовних функцій дорівнює сумі їх похідних*	$(x + \sqrt{x})' = (x)' + (\sqrt{x})' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(uv)' = u'v + v'u$	$((x + 2)x^2)' = (x + 2)'x^2 + (x^2)'(x + 2) =$ $= (x' + 2')x^2 + 2x(x + 2) =$ $= (1 + 0)x^2 + 2x(x + 2) = 3x^2 + 4x$
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1' \cdot x - x' \cdot 1}{x^2} = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

3. Похідна складеної функції (функції від функції)

Якщо $y = f(u)$ і $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$, то $(f(u(x)))' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$ Більш коротко це можна записати так*: $\boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x}$	$((3x - 1)^5)' = 5(3x - 1)^4(3x - 1)' =$ $= 5(3x - 1)^4((3x)' - 1') =$ $= 5(3x - 1)^4(3 - 0) = 15(3x - 1)^4.$ (Якщо $u = 3x - 1$, тоді $(u^5)'_x = 5u^4 u'_x$.)

*У позначеннях y'_x, f'_u, u'_x нижній індекс указує, за яким аргументом береться похідна.

Пояснення й обґрунтування

1. Правила диференціювання. Використовуючи означення похідної, у пункті 5 § 3 було знайдено похідні деяких елементарних функцій:

$$\boxed{c' = 0}\ (c \text{ — стала}),\quad \boxed{(x)' = 1},\quad \boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}},\quad \boxed{\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}.$$

Для знаходження похідних у більш складних випадках доцільно пам'ятати спеціальні правила (*правила диференціювання*) знаходження похідної від суми, добутку та частки тих функцій, для яких ми вже знаємо значення похідних, та знаходження похідної складеної функції (функції від функції).

Обґрунтуємо ці правила. Для скорочення записів використаємо такі позначення функцій та їх похідних у точці x_0:

$$u(x_0) = u,\ v(x_0) = v,\ u'(x_0) = u',\ v'(x_0) = v'.$$

Правило 1. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0, то їх сума диференційовна в цій точці і*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Коротко говорять:

похідна суми дорівнює сумі похідних.

Для доведення позначимо $y(x) = u(x) + v(x)$ і використаємо план знаходження y' за означенням похідної в точці x_0 (с. 36).

1) Приріст функції в точці x_0:

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x) - (u(x_0) + v(x_0)) =$$
$$= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x}.$

3) З'ясуємо, до якої границі прямує відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Оскільки функції u і v диференційовні в точці x_0, то при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u',\ \text{а}\ \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0) = v'\ \left(\text{тобто}\ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = u'\ \text{і}\ \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = v'\right).$$

Враховуючи, що границя суми дорівнює сумі границь доданків, одержуємо, що при $\Delta x \to 0$ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \dfrac{\Delta v}{\Delta x} \to u' + v'.$

А це й означає, що $y' = u' + v'$ $\left(\text{тобто}\ y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'\right).$

Отже, $(u + v)' = u' + v'$.

Правило 1 можна поширити на будь-яку скінченну кількість доданків* ($n \in N$):

$$\boxed{(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + u_3' + \ldots + u_n'}.$$

* Для обґрунтування того, що ця формула правильна для будь-якого натурального n, потрібно використати метод математичної індукції (див. підручник 10 класу, с. 111).

П р а в и л о 2. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0, то їх добуток диференційовний у цій точці і*

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

1) Позначимо $y(x) = u(x) \cdot v(x))$. Спочатку запишемо прирости функцій u і v у точці x_0: $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$, $\Delta v = v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)$. З цих рівностей одержуємо:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u + \Delta u, \qquad v(x_0 + \Delta x) = v(x_0) + \Delta v = v + \Delta v. \qquad (1)$$

Враховуючи рівності (1), маємо

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = u(x_0 + \Delta x)\, v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) =$$
$$= (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v - uv =$$
$$= v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v.$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{v\Delta u + u\Delta v + \Delta u \cdot \Delta v}{\Delta x} = v \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v.$

3) Оскільки функції u і v диференційовні в точці x_0, то при $\Delta x \to 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u', \text{ а } \frac{\Delta v}{\Delta x} \to v'(x_0) = v' \ \left(\text{тобто } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u' \text{ і } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'\right).$$

Оскільки функція v диференційовна в точці x_0, а значить, і неперервна в цій точці, то при $\Delta x \to 0$ значення $\Delta v \to 0$.

Враховуючи, що границя суми дорівнює сумі границь доданків (і постійні множники u і v можна виносити за знак границі), одержуємо, що при

$$\Delta x \to 0 \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \to v \cdot u' + u \cdot v' + u' \cdot 0 = v \cdot u' + u \cdot v'.$$

А це й означає, що $y' = u'v + v'u$ (тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = v \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + u \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = u'v + v'u\Bigg).$$

Отже, $(uv)' = u'v + v'u$.

Н а с л і д о к (п р а в и л о 3). *Якщо функція u диференційовна в точці x_0, а c — стала ($c = const$), то функція cu диференційовна в цій точці і*

$$(cu)' = cu'.$$

Коротко говорять:

сталий множник можна виносити за знак похідної.

Для доведення використаємо правило 2 і відомий з § 3 факт, що $c' = 0$:

$$(cu)' = c'u + u'c = 0 \cdot u + u'c = cu'.$$

П р а в и л о 4. *Якщо функції u і v диференційовні в точці x_0 і функція v не дорівнює нулю в цій точці, то їх частка $\dfrac{u}{v}$ також диференційовна в точці x_0 і*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Цю формулу можна отримати аналогічно до похідної добутку. Але можна використати простіші міркування, якщо прийняти без доведення, що похідна заданої частки існує. Позначимо функцію $\frac{u}{v}$ через t. Тоді $\frac{u}{v}=t$, $u = vt$. Знайдемо похідну функції u за правилом диференціювання добутку:

$$u' = v't + t'v.$$

Виразимо з цієї рівності t', а замість t підставимо його значення $\frac{u}{v}$. Одержимо: $t' = \frac{u' - v't}{v} = \frac{u' - v'\cdot\frac{u}{v}}{v} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. Отже, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Використовуючи правило знаходження похідної добутку і формулу $x' = 1$, обґрунтуємо, що **похідна функції** $y = x^n$ при натуральному $n > 1$ обчислюється за формулою

$$(x^n) = nx^{n-1}. \qquad (2)$$

При $n = 2$ одержуємо: $(x^2)' = (x \cdot x)' = x' \cdot x + x' \cdot x = 1 \cdot x + 1 \cdot x = 2x$. Той самий результат дає і застосування формули (2): $(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$. При $n = 3$ одержуємо: $(x^3)' = (x^2 \cdot x) = (x^2)' \cdot x + x' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 3x^2$. Той самий результат дає і застосування формули (2): $(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$. Як бачимо, наведені міркування дозволяють, спираючись на попередній результат, обґрунтувати формулу для наступного значення n.

Припустимо, що формула (2) виконується для $n = k$ $(k > 1)$, тобто

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Покажемо, що тоді формула (2) правильна і для наступного значення $n = k + 1$. Дійсно,

$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x' \cdot x^k = kx^{k-1} \cdot x + 1 \cdot x^k = k \cdot x^k + x^k = (k+1)x^k$.

Тобто, якщо формула (2) виконується при $n = 2$, то вона виконується і для наступного значення $n = 3$. Але тоді формула (2) виконується і для наступного значення $n = 4$, а отже, і для $n = 5$ і т. д. для будь-якого* натурального $n > 1$.

Можна обґрунтувати (див. с. 56), що *формула* $(x^n)' = nx^{n-1}$ *буде правильною для будь-якого дійсного показника степеня n (але тільки при тих значеннях x, при яких визначена її права частина).*

Наприклад, якщо $n = 1$ або $n = 0$, то при $x \neq 0$ ця формула теж правильна. Дійсно, якщо $x \neq 0$, то за формулою (2):

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1,$$
$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

що збігається із значеннями похідних функцій x та 1, одержаних у пункті 1.3.

* У наведеному обґрунтуванні фактично неявно використано метод математичної індукції (див. підручник для 10 класу, с. 111), який дозволяє аргументовано зробити висновок, що розглянуте твердження виконується для будь-якого натурального n (у даному випадку $n > 1$).

Якщо n — ціле від'ємне число, то $n = -m$, де m — натуральне число. Тоді при $x \neq 0$

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{1' \cdot x^m - (x^m)' \cdot 1}{(x^m)^2} = \frac{0 \cdot x^m - mx^{m-1}}{x^{2m}} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} =$$

$$= -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} = -m \cdot x^{-m-1} = n \cdot x^{n-1}.$$

Отже, формула (2) виконується і для будь-якого цілого показника степеня.

Якщо $n = \frac{1}{2}$, то при $x > 0$ маємо $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Як відомо з § 3, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (при $x > 0$). Але за формулою (2):

$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Тобто формула (2) правильна і при $n = \frac{1}{2}$. ○

2. Похідна складеної функції. Складеною функцією звичайно називають функцію від функції. Якщо змінна y є функцією від u: $y = f(u)$, а u, у свою чергу, — функцією від x: $u = u(x)$, то y *є складеною функцією* від x, тобто $y = f(u(x))$.

У такому випадку кажуть, що y є складеною функцією незалежного аргументу x, а u називають *проміжним аргументом*.

Наприклад, якщо $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = u(x) = x - 2$, то $y(x) = f(u(x)) = \sqrt{x-2}$ — складена функція, яка визначена тільки при тих значеннях x, для яких $x - 2 \geqslant 0$, тобто при $x \geqslant 2$ (проміжний аргумент $u = x - 2$).

П р а в и л о 5 (*похідна складеної функції*). *Якщо функція* $u(x)$ *має похідну в точці* x_0, *а функція* $f(u)$ — *похідну в точці* $u_0 = u(x_0)$, *то складена функція* $y = f(u(x))$ *також має похідну в точці* x_0, *причому*

$$\left(f(u(x))\right)' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

● Оскільки за умовою функція $u(x)$ має похідну в точці x_0, то вона є неперервною в цій точці (с. 31), і тоді малій зміні аргументу в точці x_0 відповідають малі зміни значень функції, тобто при $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ (с. 29). З рівності $\Delta u = u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)$ маємо

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + \Delta u = u_0 + \Delta u.$$

Тоді

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = f(u(x_0 + \Delta x)) - f(u(x_0)) =$$
$$= f(u_0 + \Delta u) - f(u_0) = \Delta f.$$

Подальше доведення проведемо тільки для таких функцій $u(x)$, у яких $\Delta u \neq 0$ у деякому околі точки x_0. При $\Delta u \neq 0$ подамо $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ так:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$. Враховуючи, що при $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x_0) = u'_x$, а при $\Delta u \to 0$ $\frac{\Delta f}{\Delta u} \to f'(u_0) = f'_u$, одержуємо, що при $\Delta x \to 0$ (і, відповідно, $\Delta u \to 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \to f'_u \cdot u'_x.$$ А це й означає, що

$$\boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x},$$

тобто

$$\left(f\left(u(x)\right)\right)' = f'_u(u) \cdot u'_x(x).$$

Отже, *похідна складеної функції $y = f(u(x))$ дорівнює добутку похідної даної функції $y = f(u)$ по проміжному аргументу u* (позначено f'_u) *на похідну проміжного аргументу $u = u(x)$ по незалежному аргументу x* (позначено u'_x). ○

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть похідну функції:

1) $y = x^7 + x^3$; 2) $y = x^8(2x + x^4)$; 3) $y = \frac{x+2}{5-x}$.

Розв'язання

1) ▶ $y' = (x^7 + x^3)' = (x^7)' + (x^3)' = 7x^6 + 3x^2$. ◁

2) ▶ $y' = (x^8(2x + x^4))' = (x^8)' \cdot (2x + x^4) + (2x + x^4)' \cdot x^8$.
Враховуючи, що $(x^8)' = 8x^7$; $(2x + x^4)' = (2x)' + (x^4)' = 2 \cdot x' + 4x^3 = 2 + 4x^3$, маємо $y' = 8x^7(2x + x^4) + (2 + 4x^3)x^8 = 16x^8 + 8x^{11} + 2x^8 + 4x^{11} = 18x^8 + 12x^{11}$. ◁

3) ▶ $y' = \left(\frac{x+2}{5-x}\right)' = \frac{(x+2)' \cdot (5-x) - (5-x)'(x+2)}{(5-x)^2}$.
Враховуючи, що $(x + 2)' = x' + 2' = 1 + 0 = 1$, $(5 - x)' = 5' - x' = 0 - 1 = -1$, маємо

$$y' = \frac{1 \cdot (5-x) - (-1) \cdot (x+2)}{(5-x)^2} = \frac{5 - x + x + 2}{(5-x)^2} = \frac{7}{(5-x)^2}.$$ ◁

Коментар

Нагадаємо, що *алгебраїчний вираз (чи формулу, яка задає функцію) називають за результатом останньої дії, яку потрібно виконати при знаходженні значення заданого виразу*. Отже, у завданні 1 спочатку потрібно знайти похідну суми:

$$(u + v)' = u' + v'$$

у завданні 2 — похідну добутку:

$$(uv)' = u'v + u'v,$$

а в завданні 3 — похідну частки:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Також у завданнях 1 і 2 слід використати формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, а в завданні 2 врахувати, що при обчисленні похідної від $2x$ постійний множник 2 можна виносити за знак похідної.

Зауважимо, що в завданні 2 простіше спочатку розкрити дужки, а потім взяти похідну суми.

Приклад 2 Обчисліть значення похідної функції $f(x)=x^2-5\sqrt{x}$ у заначених точках: $x = 4$, $x = 0{,}01$.

Розв'язання

$$f'(x)=\left(x^2-5\sqrt{x}\right)'=\left(x^2\right)'-5\left(\sqrt{x}\right)'=$$
$$=2x-5\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=2x-\frac{5}{2\sqrt{x}}.$$
$$f'(4)=2\cdot4-\frac{5}{2\sqrt{4}}=8-\frac{5}{4}=6\frac{3}{4}.$$
$$f'(0{,}01)=2\cdot0{,}01-\frac{5}{2\sqrt{0{,}01}}=0{,}02-\frac{5}{2\cdot0{,}1}=$$
$$=0{,}02-\frac{5}{0{,}2}=0{,}02-25=-24{,}98.$$

Відповідь: $6\frac{3}{4}$; $-24{,}98$.

Коментар

Для знаходження значення похідної у вказаних точках достатньо знайти похідну даної функції і в одержаний вираз підставити задані значення аргументу. При обчисленні похідної слід врахувати, що задану різницю можна розглядати як алгебраїчну суму виразів x^2 і $\left(-5\sqrt{x}\right)$, а при знаходженні похідної $\left(-5\sqrt{x}\right)$ за знак похідної винести постійний множник (-5). Так що фактично в результаті ми отримаємо різницю похідних функцій x^2 і $5\sqrt{x}$.

Приклад 3 Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x) = x^4 - 32x$ дорівнює нулю.

Розв'язання

$$f'(x) = (x^4 - 32x)' =$$
$$= (x^4)' - 32x' - 4x^3 - 32.$$
$f'(x) = 0$. Тоді $4x^3 - 32 = 0$,
$x^3 = 8$, $x = 2$.

Відповідь: 2.

Коментар

Щоб знайти відповідні значення x, достатньо знайти похідну заданої функції, прирівняти її до нуля і розв'язати одержане рівняння.

Приклад 4 Знайдіть похідну функції f:

1) $f(x) = (x^3 - 1)^{-7}$; 2) $f(x)=\sqrt{5x^2+x}$;

3*) $f(x)=\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3+\frac{1}{(3x-2)^4}$.

Розв'язання

1) $f'(x) = -7(x^3 - 1)^{-7-1}\cdot(x^3 - 1)'$.
Враховуючи, що
$(x^3 - 1)' = (x^3)' - 1' = 3x^2 - 0 = 3x^2$,
одержуємо
$$f'(x) = -7(x^3 - 1)^{-8}\cdot 3x^2 =$$
$$= -21x^2(x^3 - 1)^{-8} = -\frac{21x^2}{(x^3-1)^8};$$

Коментар

У завданнях 1 і 2 необхідно знайти відповідно похідну степеня і кореня, але в основі степеня і під знаком кореня стоїть не аргумент x, а вирази з цим аргументом (теж функції від x). Отже, потрібно знайти похідні складених функцій.

2) ▶ $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{5x^2+x}}\cdot(5x^2+x)'$.

Враховуючи, що
$(5x^2+x)' = 5(x^2)' + x' =$
$= 5\cdot 2x + 1 = 10x + 1$, одержуємо

$$f'(x)=\frac{10x+1}{2\sqrt{5x^2+x}};\ \triangleleft$$

3*) ▶ $f'(x)=\left(\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3\right)'+\left(\frac{1}{(3x-2)^4}\right)'$.

Знайдемо похідну кожного доданка.

$$A=\left(\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3\right)'=$$
$$=3\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^2\left(1+\sqrt{2x+3}\right)'.$$

Враховуючи, що

$$\left(1+\sqrt{2x+3}\right)'=1'+\left(\sqrt{2x+3}\right)'=$$
$$=0+\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\cdot(2x+3)'=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\cdot 2=\frac{1}{\sqrt{2x+3}},$$

одержуємо $A=\frac{3\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^2}{\sqrt{2x+3}}$.

$$B=\left(\frac{1}{(3x-2)^4}\right)'=((3x-2)^{-4})'=$$
$$=-4(3x-2)^{-4-1}(3x-2)'=-\frac{12}{(3x-2)^5}.$$

$$f'(x)=A+B=\frac{3\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^2}{\sqrt{2x+3}}-\frac{12}{(3x-2)^5}.\ \triangleleft$$

Позначаючи (на чернетці або уявно) проміжний аргумент через u (для завдання 1: $u = x^3 - 1$, а для завдання 2: $u = 5x^2 + x$), за формулою $f'_x = f'_u \cdot u'_x$ записуємо похідні заданих функцій з урахуванням формул

$$(u^n)' = nu^{n-1} \text{ і } \left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}.$$

У завданні 3 спочатку ми можемо знайти похідну суми, а далі — похідну кожного доданка як похідну складеної функції.

Вираз $A=\left(\left(1+\sqrt{2x+3}\right)^3\right)'$ — це похідна степеня (u^3), але це похідна складеної функції, у якої проміжний аргумент $u=1+\sqrt{2x+3}$.

Знаходячи $u'=\left(1+\sqrt{2x+3}\right)'$, доводиться знову розглядати похідну суми, а похідну $\left(\sqrt{2x+3}\right)'$ — розглядати як похідну складеної функції $\left(\sqrt{u}\right)$, у якої проміжний аргумент $u = 2x + 3$.

Другий доданок можна записати як $(3x-2)^{-4}$ (тобто u^{-4}). Тоді проміжний аргумент $u = 3x - 2$ (хоча для знаходження похідної другого доданка можна використати і формулу для похідної частки).

Запитання для контролю

1. Запишіть правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій. Проілюструйте їх застосування на прикладах.
2. Запишіть формулу знаходження похідної степеневої функції x^n. Проілюструйте її застосування на прикладах.
3. Поясніть на прикладах правило знаходження похідної складеної функції.
4*. Обґрунтуйте правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій та правила знаходження похідної складеної функції.

5*. **Обґрунтуйте формулу знаходження похідної від степеневої функції x^n для цілих значень n.**

Вправи

Знайдіть похідну функції (1–5).

1°. 1) $y = x^8$; 2) $y = x^{-5}$; 3) $y = x^{\frac{2}{3}}$; 4) $y = x^{20}$; 5) $y = x^{-20}$; 6) $y = x^{-\frac{1}{2}}$.

2. 1°) $f(x) = x + 3$; 2°) $f(x) = x^5 - x$; 3) $f(x) = \frac{1}{x} - x^3$; 4) $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$.

3. 1) $f(x) = 2x^3 + 3x$; 2) $f(x) = x^2 + 5x + 2$;

3) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} + 4x^3 + 3$.

4. 1) $y = x^2(2x + x^4)$; 2) $y = (2x - 1)(1 - x^2)$;

3) $y = (3 + x^3)(2 - x)$; 4) $y = \sqrt{x}(3x^2 - x)$.

5. 1) $y = \frac{x^2}{x+3}$; 2) $y = \frac{2x+1}{3x-2}$; 3) $y = \frac{2-x}{5x+1}$; 4) $y = \frac{1-2x}{x^2}$.

6. **Обчисліть значення похідної функції $f(x)$ у зазначених точках:**

1°) $f(x) = x^2 + 2x$; $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$; 2°) $f(x) = x^4 - 4x$; $x = 2$, $x = -1$;

3) $f(x) = \frac{x+1}{2x-3}$; $x = 0$, $x = -3$; 4) $f(x) = x - \frac{1}{x}$; $x = -\sqrt{2}$, $x = 0{,}1$.

7. **Знайдіть значення x, для яких похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю:**

1°) $f(x) = 3x^2 - 6x$; 2°) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 5$;

3) $f(x) = 12x + \frac{3}{x}$; 4) $f(x) = \sqrt{x} - 2x^2$.

8. **Розв'яжіть нерівність $f'(x) < 0$, якщо:**

1°) $f(x) = 2x - x^2$; 2°) $f(x) = x^3 + 3x^2$; 3) $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$; 4) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

9. **Задайте формулами елементарні функції $f(u)$ і $u(x)$, з яких складається складена функція $y = f(u(x))$:**

1) $y = \sqrt{\sin x}$; 2) $y = (2x + x^2)^5$; 3) $y = \sqrt{x^3 - x}$; 4) $y = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

10. **Знайдіть область визначення функції:**

1°) $y = (2x^3 - 4x)^5$; 2°) $y = \sqrt{2x+6}$; 3°) $y = \ln(2x - 8)$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$;

5) $y = \sqrt{\sin x}$; 6) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - 2}$; 7*) $y = \sqrt{1 - 2\cos x}$; 8*) $y = \arcsin(\log_{0,1} x)$.

11. **Знайдіть похідну функції $f(x)$:**

1) $f(x) = (x^2 - x)^3$; 2) $f(x) = (2x - 1)^{-5}$; 3) $f(x) = \left(x - \frac{1}{x}\right)^4$;

4) $f(x)=\sqrt{5x-x^2}$; 5*) $f(x)=\sqrt{2+\sqrt{3x}}+\frac{1}{(2x-1)^2}$.

12. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 2$; 2) $f(x) = x^3 - x$, $x_0 = -3$;

3) $f(x)=\sqrt{2x-x^3}$, $x_0 = 1$; 4) $f(x)=2x^3-\frac{1}{x}$, $x_0 = -1$.

§5 ПОХІДНІ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ

Таблиця 5

$c' = 0$ (c — стала)	$(x)' = 1$	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$)
$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$, a — стала)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$, a — стала)	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ (на ОДЗ правої частини формули)

Пояснення й обґрунтування

Формули $c' = 0$ (c — стала), $(x)' = 1$, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ($x > 0$) було обґрунтовано в § 3 і 4.

Для обґрунтування формули $(\sin x)' = \cos x$ використаємо те, що при малих значеннях α значення $\sin \alpha \approx \alpha$ (наприклад, $\sin 0{,}01 \approx 0{,}010$, $\sin 0{,}001 \approx 0{,}001$). Тоді при $\alpha \to 0$ відношення $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$, тобто

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1. \qquad (1)^*$$

* Справедливість цієї формули обґрунтована на с. 126 .

Якщо $y = f(x) = \sin x$, то, використовуючи формулу перетворення різниці синусів у добуток і схему знаходження похідної за означенням (с. 36), маємо:

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$

$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right).$

3) При $\Delta x \to 0$ $\quad \dfrac{\Delta x}{2} \to 0.$ Тоді $\cos\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x_0)$, а, враховуючи (1)

$\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1.$ Отже, при $\Delta x \to 0$ $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$, тобто $f'(x_0) = \cos x_0$.

Тоді похідна функції $y = \sin x$ у довільній точці x дорівнює $\cos x$. Отже,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Враховуючи, що за формулами зведення $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$;

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, і використовуючи правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо:

$(\cos x)' = \left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x \cdot (0 - 1) = -\sin x.$ Отже,

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Для знаходження похідних $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{ctg} x$ використаємо формули: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$,

$\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ і правило знаходження похідної частки. Наприклад,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - (\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x)\sin x}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$ Отже,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Щоб обґрунтувати *формули похідних показникових та логарифмічних функцій*, використаємо без доведення властивість функції* e^x, яка доводиться в курсі вищої математики:

---

* Нагадаємо, що e — ірраціональне число, перші знаки якого такі: $e = 2{,}71828182\ldots$.

похідна функції e^x дорівнює цій самій функції e^x, тобто

$$(e^x)' = e^x.$$

При $a > 0$ за основною логарифмічною тотожністю маємо $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$. Тоді за правилом знаходження похідної складеної функції, одержуємо:

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a, \text{ тобто}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

За одержаною формулою ми можемо знайти значення похідної показникової функції для будь-якого значення x. Отже, *показникова функція диференційовна в кожній точці області визначення,* а значить, *і неперервна в кожній точці своєї області визначення* (тобто при всіх дійсних значеннях x).

Для логарифмічної функції спочатку знайдемо похідну функції $\ln x$, приймаючи без доведення існування похідної. Область визначення цієї функції — $x > 0$, тобто $(0; +\infty)$. При $x > 0$ за основною логарифмічною тотожністю маємо $e^{\ln x} = x$. Ця рівність означає, що при $x > 0$ функції $e^{\ln x}$ і x співпадають (це одна і та сама функція, задана на множині $\boldsymbol{R}_+$), а значить, співпадають їх похідні. Використовуючи для лівої частини рівності правило знаходження похідної складеної функції, одержуємо:
$(e^{\ln x})' = (x)'$; $e^{\ln x}(\ln x)' = 1$, тобто $x(\ln x)' = 1$. Звідси

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ (де } x > 0).$$

Оскільки $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}\cdot\ln x$, то

$$(\log_a x)' = \left(\frac{1}{\ln a}\cdot\ln x\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}. \text{ Отже,}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a} \text{ (де } x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ a \text{ — стала).}$$

Зауваження. Формула $(x^n)' = nx^{n-1}$ була обґрунтована в § 4 тільки для цілих значень n. Доведемо, що вона виконується і при будь-яких дійсних значеннях n.

Якщо n — довільне не ціле число, то функція x^n означена тільки при $x > 0$. Тоді за основною логарифмічною тотожністю $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n\ln x}$. За правилом обчислення похідної складеної функції одержуємо:

$$(x^n)' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x}(n\ln x)' = x^n\cdot n\cdot(\ln x)' = x^n\cdot n\cdot\frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$

Отже, надалі формулою $(x^n)' = nx^{n-1}$ можна користуватися при будь-яких дійсних значеннях n (нагадаємо, що в цьому випадку її можна використовувати тільки при тих значеннях x, при яких визначена її права частина).

Спираючись на одержаний результат, обґрунтуємо також формулу

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \qquad (2)$$

яку можна використовувати при тих значеннях x, при яких визначена її права частина.

Якщо n — парне число, то ОДЗ правої частини формули (2): $x > 0$. Але за цієї умови

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}. \qquad (3)$$

Якщо n — непарне число, то ОДЗ правої частини формули (2): $x \neq 0$. При $x > 0$ залишається справедливою рівність (3), а при $x < 0$, врахуємо, що $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$ і $-x > 0$, а також те, що при непарному n число $1 - n$ буде парним (тому $(-1)^{1-n} = 1$). Тоді

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \left(-\sqrt[n]{-x}\right)' = \left(-(-x)^{\frac{1}{n}}\right)' = -\frac{1}{n}(-x)^{\frac{1}{n}-1}(-x)' = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(-x)^{1-n}} =$$

$$= \frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{1-n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}.$$

Отже, і для непарного n при всіх $x \neq 0$ формула (2) теж виконується.

Зауважимо, що в останньому випадку такі громіздкі перетворення довелося виконувати через те, що при $x < 0$ вираз $x^{\frac{1}{n}}$ не означений, а вираз $(-x)^{\frac{1}{n}}$ існує, оскільки $-x > 0$ при $x < 0$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть похідну функції:

1) $f(x) = \sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}$; 2) $f(x) = \frac{\ln x}{\cos 3x}$.

Розв'язання	Коментар
1) $f'(x) = \left(\sin^2 x + e^{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= \left(\sin^2 x\right)' + \left(e^{\frac{x}{2}}\right)' =$ $= 2\sin x\,(\sin x)' + e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}\right)' =$ $= 2\sin x\cos x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} = \sin 2x + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.	Послідовно визначаємо, від якого виразу береться похідна (орієнтуючись на результат останньої дії). У завданні 1 спочатку береться похідна суми: $(u + v)' = u' + v'$. Потім для кожного з доданків використовується похідна складеної функції: береться похідна від u^2 та e^u і мно-

2) ▶ $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{\cos 3x}\right)'=$

$$=\frac{(\ln x)'\cdot\cos 3x-(\cos 3x)'\cdot\ln x}{(\cos 3x)^2}=$$

$$=\frac{\frac{1}{x}\cdot\cos 3x-(-\sin 3x)(3x)'\cdot\ln x}{\cos^2 3x}=$$

$$=\frac{\cos 3x+3x\cdot\sin 3x\cdot\ln x}{x\cos^2 3x}.\ \triangleleft$$

житься на u'. Одержаний результат бажано спростити за формулою:

$$2\sin x\cos x=\sin 2x.$$

У завданні 2 спочатку береться похідна частки: $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, а для похідної знаменника використовується похідна складеної функції (похідна cos u множиться на u').

Приклад 2 Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції

$$f(x)=x-\ln 2x:$$

1) дорівнює нулю, 2) додатне, 3) від'ємне.

Розв'язання

▶ Область визначення заданої функції: $x>0$, тобто $(0;+\infty)$

$$f'(x)=x'-(\ln 2x)'=1-\frac{1}{2x}\cdot(2x)'=1-\frac{1}{x}.$$

Область визначення функції $f'(x)$: $x\neq 0$. Тобто похідна $f'(x)$ існує на всій області визначення заданої функції: $x>0$.

$$f'(x)=0,\ 1-\frac{1}{x}=0,\ x=1$$

(задовольняє умові $x>0$).

При $x>0$ нерівності $f'(x)>0$, тобто $1-\frac{1}{x}>0$, та $f'(x)<0$, тобто $1-\frac{1}{x}<0$, розв'яжемо методом інтервалів (рис. 26):

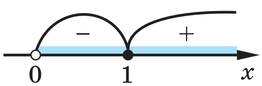


Рис. 26

Відповідь: 1) $f'(x)=0$ при $x=1$;
2) $f'(x)>0$ при $x\in(1;+\infty)$;
3) $f'(x)<0$ при $x\in(0;1)$. ◁

Коментар

Похідна заданої функції може існувати тільки в тих точках, які входять до області визначення цієї функції. Тому спочатку доцільно знайти область визначення заданої функції.

Похідна функції сама є функцією від x, і тому для розв'язування нерівностей $f'(x)\gtrless 0$ можна використати метод інтервалів. Після знаходження ОДЗ відповідної нерівності потрібно співставити її з областю визначення функції $f(x)$ і продовжувати розв'язання нерівності на їх спільній частині.

Отже, *нерівності $f'(x)\gtrless 0$ завжди розв'язуються на спільній частині областей визначення функцій $f(x)$ і $f'(x)$.* Для розв'язування відповідних нерівностей достатньо на спільній області визначення функцій $f(x)$ і $f'(x)$ відмітити нулі $f'(x)$ і знайти знак $f'(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ця спільна область визначення.

Приклад 3 Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $y = xe^x$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язання

Якщо $f(x) = xe^x$, то $f(x_0) = f(1) = e$. $f'(x) = x' \cdot e^x + (e^x)' \cdot x = e^x + xe^x$. Тоді $f'(x_0) = f'(1) = 2e$. Підставляючи ці значення в рівняння дотичної $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, одержуємо: $y = e + 2e(x - 1)$. Тобто $y = 2ex - e$ — шукане рівняння дотичної. ◁

Коментар

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 у загальному вигляді записується так:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Щоб записати це рівняння для заданої функції, потрібно знайти $f(x_0)$, похідну $f'(x)$ і значення $f'(x_0)$. Для виконання відповідних обчислень зручно позначити задану функцію через $f(x)$, а для знаходження її похідної використати формулу похідної добутку:

$$(uv)' = u'v + v'u.$$

Запитання для контролю

1. Запишіть формули знаходження похідних:
   а) тригонометричних функцій;
   б) показникової і логарифмічної функцій;
   в) функції $\sqrt[n]{x}$.

2*. Обґрунтуйте формули знаходження похідних, указаних у запитанні 1.

Вправи

Знайдіть похідну функції **(1–7)**.

1°. 1) $y = \cos x + 1$; 2) $y = 2\sin x - 3x$; 3) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 4) $y = x^3 - \operatorname{ctg} x$.

2. 1) $f(x) = x \operatorname{tg} x$; 2) $f(x) = x \operatorname{ctg} x$; 3) $f(x) = \sin x \operatorname{tg} x$; 4) $f(x) = \cos x \operatorname{ctg} x$.

3. 1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; 2) $f(x) = \frac{x}{\cos x}$; 3) $f(x) = \sin^2 x$; 4) $f(x) = \cos^2 x$.

4. 1) $y = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$; 2) $y = \cos^2 3x - \sin^2 3x$;
3) $y = \sin 4x \cos 2x - \cos 4x \sin 2x$; 4) $y = \sin 7x \sin 3x + \cos 7x \cos 3x$.

5*. 1) $y = \sqrt{1 + \sin x}$; 2) $y = \cos x^2$; 3) $y = \sin(\cos x)$; 4) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$.

6°. 1) $y = 3e^x + 4$; 2) $y = e^x - \ln x$; 3) $y = e^{-x} + x^5$; 4) $y = \ln(2x - 1)$.

7. 1) $y = e^{5x} \cos x$; 2) $y = \frac{\ln x}{x}$; 3) $y = \sqrt{x} \lg x$; 4) $y = x^3 \log_2 x$.

Обчисліть значення похідної функції f у зазначеній точці **(8–9)**.

8. 1°) $f(x) = \cos 2x,\ x=\frac{\pi}{2}$; 2°) $f(x) = x + \operatorname{tg} x,\ x = 0$;

3) $f(x)=\frac{1+\cos x}{\sin x},\ x=\frac{3\pi}{2}$; 4) $f(x) = \operatorname{tg}^2 2x,\ x=\frac{3\pi}{8}$.

9. 1°) $f(x) = e^{3x} + \sin x,\ x = 0$; 2°) $f(x) = x + \ln x,\ x = 2$;

3) $f(x) = (2x^2 - 1)\ln^2 x,\ x = 1$; 4) $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x},\ x=\frac{\pi}{4}$.

Знайдіть значення x, для яких похідна функції f дорівнює нулю **(10–11)**.

10. 1°) $f(x) = 2 - \cos x$; 2°) $f(x)=\sin x-\frac{1}{2}x$;

3) $f(x) = \sin^2 2x$; 4) $f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\sin x$.

11. 1°) $f(x) = \ln(x + 3) - x$; 2°) $f(x) = e^x - x$;

3) $f(x)=\frac{x}{\ln x}$; 4) $f(x) = e^x \sin x$.

12. Розв'яжіть нерівність $f'(x) > 0$, якщо:
1°) $f(x) = e^{2x} - x$; 2°) $f(x) = 2x - \ln x$;
3) $f(x) = x \ln x$; 4) $f(x) = (1 - x)e^{-2x}$.

13. Знайдіть значення x, при яких значення похідної функції $f(x)$: а) дорівнює нулю, б) додатне, в) від'ємне.
1) $f(x) = x^2 \ln x$; 2) $f(x) = x^3 - 3 \ln x$;

3) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

14. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = \cos x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$; 2) $f(x) = \operatorname{tg} 2x,\ x_0=\frac{\pi}{8}$;

3) $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}},\ x_0 = 0$; 4) $f(x) = \ln x - x,\ x_0 = 1$.

15. Знайдіть абсциси x_0 точок графіка функції $y = f(x)$, у яких дотична до нього утворює кут φ з додатним напрямком осі Ox:
1) $f(x) = \sin 2x,\ \varphi = 0°$; 2) $f(x) = \ln 2x,\ \varphi = 45°$; 3) $f(x) = e^{-x},\ \varphi = 135°$.

16*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{5x+1}$, яка паралельна прямій $y = 5x - 8$.

17*. Знайдіть рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{3x-2}$, яка паралельна прямій $y = 3x + 17$.

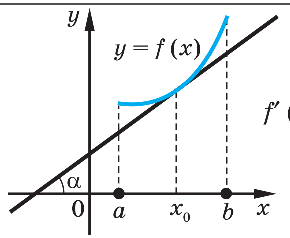
§6 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

6.1. Застосування похідної до знаходження проміжків зростання і спадання функції та екстремумів функції

Таблиця 6

1. Монотонність і сталість функції

Достатня умова зростання функції

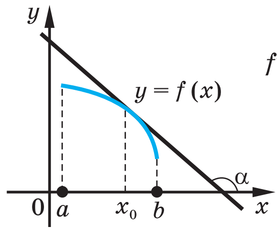


$0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha > 0$

Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ **$f'(x) > 0$, то функція $f(x)$ зростає** на цьому інтервалі.

Достатня умова спадання функції

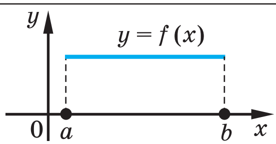


$90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha < 0$

Якщо в кожній точці інтервалу $(a; b)$ **$f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ спадає** на цьому інтервалі.

Необхідна і достатня умова сталості функції



Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу.

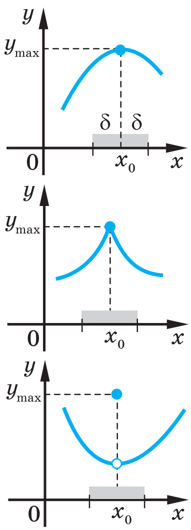
2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

Точки максимуму

Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається ***точкою максимуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність

$$f(x) < f(x_0)$$

$x_{max} = x_0$ — *точка максимуму*

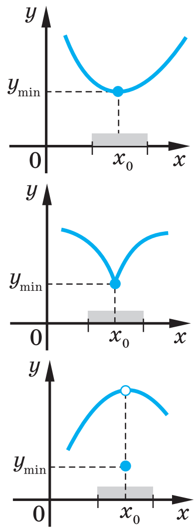


Точки мінімуму

Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається ***точкою мінімуму*** цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність

$$f(x) > f(x_0)$$

$x_{min} = x_0$ — *точка мінімуму*



Продовж. табл. 6

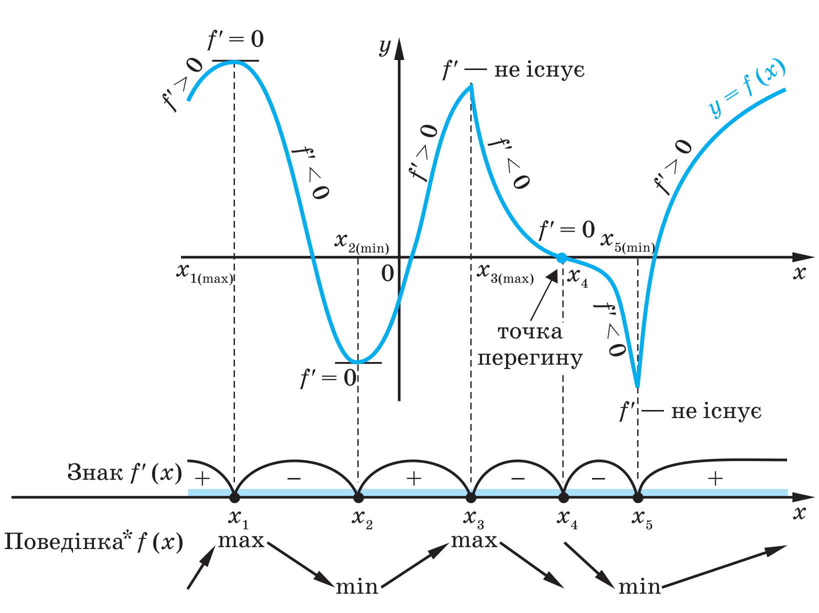
Точки максимуму і мінімуму називаються *точками екстремуму* *Значення функції в точках максимуму і мінімуму називаються екстремумами (максимумом і мінімумом) функції*	
$y_{\max} = f(x_{\max}) = f(x_0)$ — *максимум*	$y_{\min} = f(x_{\min}) = f(x_0)$ — *мінімум*
3. Критичні точки	
Означення	Приклад
Критичними точками **функції називаються внутрішні точки її області визначення, у яких похідна функції дорівнює нулю* або не існує.**	$f(x) = x^3 - 12x \qquad (D(f) = \boldsymbol{R})$. $f'(x) = 3x^2 - 12$ — існує на всій області визначення. $f'(x) = 0$ при $3x^2 - 12 = 0$, $x^2 = 4$, $x = \pm 2$ — критичні точки.
4. Необхідна і достатня умови екстремуму	
Необхідна умова екстремуму	Достатня умова екстремуму
У точках екстремуму похідна функції $f(x)$ дорівнює нулю або не існує **x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$** $\Downarrow$ **$f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ — не існує** (але не в кожній точці x_0, де $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує, буде екстремум)	*Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході** через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$* **У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «+» на «−»** $\Rightarrow$ **x_0 — точка максимуму** **У точці x_0 знак $f'(x)$ змінюється з «−» на «+»** $\Rightarrow$ **x_0 — точка мінімуму**

* Внутрішні точки області визначення функції, у яких похідна дорівнює нулю, також називають стаціонарними точками.

** Мається на увазі перехід через точку x_0 при русі зліва направо.

Продовж. табл. 6

5. Приклад графіка функції $y = f(x)$, що має екстремуми (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критичні точки)

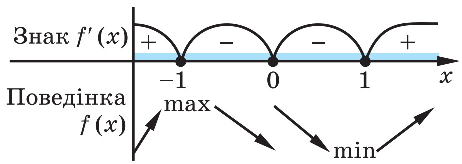


6. Дослідження функції $y = f(x)$ на монотонність і екстремум

Схема	Приклад: $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Знайти область визначення функції.	Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$.
3. Знайти критичні точки, тобто *внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує.*	$f'(x)$ існує на всій області визначення. $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

* Знаком «↗» позначено зростання функції, а знаком «↘» — її спадання на відповідному проміжку.

Продовж. табл. 6

<table>
<tr><td>4. Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.</td><td rowspan="2">
</td></tr>
<tr><td>5. Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи вона не є точкою екстремуму.</td></tr>
<tr><td>6. Записати результат дослідження (проміжки монотонності і екстремуми).</td><td>$f(x)$ зростає на кожному з проміжків: $(-\infty; -1]$ і $[1; +\infty)^*$;
$f(x)$ спадає на $[-1; 1]$.
Точки екстремуму:
$x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$.
Екстремуми:
$y_{max} = f(-1) = 3$; $y_{min} = f(1) = -1$.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Монотонність і сталість функції. Критичні точки функції. Похідна є важливим інструментом дослідження функції. Зокрема, за допомогою похідної зручно досліджувати функцію на монотонність (тобто на зростання та спадання).

Нагадаємо, що *функція $f(x)$ називається зростаючою на множині P, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає більше значення функції*, тобто для будь-яких x_1 і x_2 з цієї множини, з умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) > f(x_1)$.

Функція $f(x)$ називається спадною на множині P, якщо більшому значенню аргументу з цієї множини відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких x_1 і x_2 з цієї множини з умови $x_2 > x_1$ випливає, що $f(x_2) < f(x_1)$.

Як видно з рисунка 27, *а*, у кожній точці графіка зростаючої функції дотична утворює з додатним напрямком осі Ox або гострий кут α (тоді

* Як відзначено на с. 69, оскільки функція $f(x)$ неперервна (наприклад, через те, що вона диференційовна на всій області визначення), то точки -1 і 1 можна включити до проміжків зростання і спадання функції.

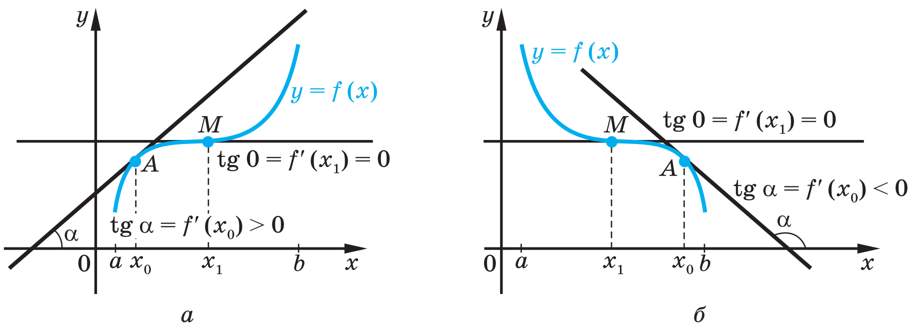


Рис. 27

$f'(x_0) = \text{tg}\, \alpha > 0$), або кут, що дорівнює нулю (тоді $f'(x_1) = \text{tg}\, 0 = 0$)). А в кожній точці графіка спадної функції (рис. 27, *б*) дотична утворює з додатним напрямком осі Ox або тупий кут α (тоді $f'(x_0) = \text{tg}\, \alpha < 0$), або кут, що дорівнює нулю (тоді $f'(x_1) = \text{tg}\, 0 = 0$)).

Отже, *якщо на якомусь інтервалі функція* $f(x)$ *диференційовна і зростає, то* $f'(x) \geqslant 0$ *на цьому інтервалі; якщо на якомусь інтервалі функція* $f(x)$ *диференційовна і спадає, то* $f'(x) \leqslant 0$ *на цьому інтервалі*.

Але для розв'язування задач на дослідження властивостей функцій важливими є обернені твердження, які дозволяють за знаком похідної з'ясувати характер монотонності функції.

Для обґрунтування відповідних тверджень скористаємося так званою *формулою Лагранжа*. Її строге доведення наводиться в курсах математичного аналізу, а ми обмежимося тільки її геометричною ілюстрацією та формулюванням.

Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх точках інтервалу $(a; b)$. Тоді на цьому інтервалі знайдеться така точка c, що дотична l до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою c буде паралельна січній AB, яка проходить через точки $A(a; f(a))$, $B(b; f(b))$ (рис. 28).

Дійсно, розглянемо всі можливі прямі, що паралельні січній AB і мають з графіком функції $f(x)$ на інтервалі $(a; b)$ хоча б одну спільну точку. Та з цих прямих, яка знаходиться на найбільшій відстані від січної AB, і буде дотичною до графіка функції $f(x)$ (це якраз і буде граничне положення січної, паралельної AB). Якщо позначити абсцису точки дотику через c, то, враховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо $f'(c) = \text{tg}\, \alpha$, де α — кут між прямою l і додатним напрямком осі Ox. Але $l \parallel AB$, тому

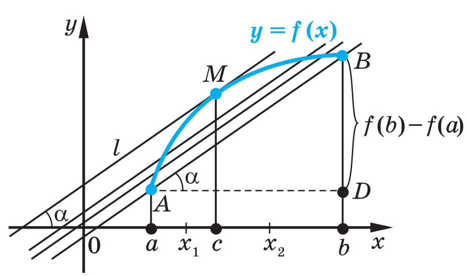


Рис. 28

кут α дорівнює куту нахилу січної AB до осі Ox (який, у свою чергу, дорівнює куту A прямокутного трикутника ABD з катетами: $AD = b - a$, $BD = f(b) - f(a)$). Тоді $f'(c) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Таким чином, можна зробити висновок:

якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційовна в усіх точках інтервалу $(a; b)$, то на інтервалі $(a; b)$ знайдеться така точка $c \in (a; b)$, що

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Ця формула називається *формулою Лагранжа.*

Тепер застосуємо цю формулу для обґрунтування достатніх умов зростання і спадання функції.

> **1. *Якщо $f'(x) > 0$ у кожній точці інтервалу $(a; b)$, то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.***
> **2. *Якщо $f'(x) < 0$ у кожній точці інтервалу $(a; b)$, то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.***

Візьмемо дві довільні точки x_1 і x_2 із заданого інтервалу. За формулою Лагранжа існує число $c \in (x_1; x_2)$ таке, що

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \tag{1}$$

Число c належить заданому інтервалу, оскільки йому належать числа x_1 і x_2. Нехай $x_2 > x_1$. Тоді $x_2 - x_1 > 0$.

Якщо $f'(x) > 0$ у кожній точці заданого інтервалу, то $f'(c) > 0$, і з рівності (1) одержуємо, що $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$. А це і означає, що функція $f(x)$ зростає на заданому інтервалі.

Якщо $f'(x) < 0$ у кожній точці заданого інтервалу, то $f'(c) < 0$, і з рівності (1) одержуємо, що $f(x_2) - f(x_1) < 0$, тобто $f(x_2) < f(x_1)$. А це і означає, що функція $f(x)$ спадає на заданому інтервалі.

Приклад 1 Функція $f(x) = x^3 + x$ означена на всій множині дійсних чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) і має похідну $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ при всіх значеннях x. Отже, ця функція зростає на всій області визначення.

Приклад 2 Функція $g(x) = \sin x - 3x$ означена на всій множині дійсних чисел ($x \in \boldsymbol{R}$) і має похідну $g'(x) = \cos x - 3$. Оскільки $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то $\cos x - 3 < 0$ при всіх значеннях x. Отже, ця функція спадає на всій області визначення.

Зауважимо, що в курсі 10 класу (§ 25) ми без доведення відзначили, що при $x > 0$ функція $y = x^\alpha$, де α — неціле число, зростає при $\alpha > 0$ і спадає при $\alpha < 0$. Обґрунтуємо це. Дійсно, $y' = (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$. Тоді при $x > 0$ і $\alpha > 0$ значення $y' > 0$, отже, функція $y = x^{\alpha}$ зростає, а при при $x > 0$ і $\alpha < 0$ значення $y' < 0$, отже, функція $y = x^{\alpha}$ спадає.

Достатні ознаки зростання і спадання функції мають наочну фізичну ілюстрацію. Нехай по осі ординат рухається точка, яка в момент часу t має ординату $y = f(t)$. Враховуючи фізичний зміст похідної, одержуємо, що швидкість цієї точки в момент часу t дорівнює $f'(t)$. Якщо $f'(t) > 0$, то точка рухається в додатному напрямку осі ординат, і з збільшенням часу ордината точки збільшується, тобто функція зростає. Якщо ж $f'(t) < 0$, то точка рухається у від'ємному напрямку осі ординат, і з збільшенням часу ордината точки зменшується, тобто функція спадає.

Зазначимо, що в тому випадку, коли $f'(t) = 0$, швидкість точки дорівнює нулю, тобто точка не рухається, і тому її ордината залишається сталою. Одержуємо *умову сталості функції.*

Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу.

Дійсно, якщо $f(x) = k$ (де k — стала), то $f'(x) = 0$.

Навпаки, якщо $f'(x) = 0$ в усіх точках інтервалу $(a; b)$, то зафіксуємо деяке число x_0 з цього інтервалу і знайдемо значення функції в точці x_0 (нехай $f(x_0) = k$). Для будь-якого числа x із заданого інтервалу за формулою Лагранжа можна знайти число c, яке міститься між x і x_0, таке, що

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c).$$

Тоді $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$.

Оскільки $c \in (a; b)$, то за умовою $f'(c) = 0$. Отже, $f(x) - f(x_0) = 0$. Таким чином, для всіх x із заданого інтервалу $f(x) = f(x_0) = k$, тобто функція $f(x)$ є сталою.

З а у в а ж е н н я. У випадку, *коли функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *і* $f'(x) = 0$ *в усіх точках інтервалу* $(a; b)$, то при наближенні значення x до точки a справа значення $f(x) \to f(a)$. Але $f(x) = k$, тоді і $f(a) = k$ (аналогічно, наближаючи значення x до точки b зліва, обґрунтовується і те, що $f(b) = k$). Отже, у цьому випадку *функція* $f(x)$ *є постійною на відрізку* $[a; b]$.

Для знаходження проміжків зростання і спадання функції потрібно розв'язати нерівності $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ на області визначення функції $f(x)$. Оскільки $f'(x)$ теж можна розглядати як функцію від змінної x, то для розв'язування цих нерівностей можна використати метод інтервалів, точніше, його узагальнення, що спирається на твердження, яке в курсах математичного аналізу звичайно називають т е о р е м о ю Д а р б у*:

* Жан Гастон Дарбу (1842–1917) — французький математик, який зробив значний внесок у розвиток диференціальної геометрії, інтегрального числення та механіки.

точки, у яких похідна дорівнює нулю або не існує, розбивають область визначення функції $f(x)$ на проміжки, у кожному з яких $f'(x)$ зберігає сталий знак.

Зазначимо, що

внутрішні* точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками* цієї функції.

Згадуючи план розв'язування нерівностей методом інтервалів (с. 21), одержуємо, що проміжки зростання і спадання функції $f(x)$ можна знаходити за схемою:

1. *Знайти область визначення функції $f(x)$.*
2. *Знайти похідну $f'(x)$.*
3. *З'ясувати, у яких внутрішніх точках області визначення функції похідна $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує (*тобто *знайти критичні точки цієї функції).*
4. *Відмітити знайдені точки на області визначення функції $f(x)$ і знайти знак $f'(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається область визначення функції (знак можна визначити, обчисливши значення $f'(x)$ у будь-якій точці проміжку).*

Приклад 3 Дослідимо функцію $f(x) = x^3 - 3x$ на зростання і спадання.

Розв'язання

1. Область визначення заданої функції — усі дійсні числа ($D(f) = R$).
2. Похідна $f'(x) = 3x^2 - 3$.
3. Похідна існує на всій області визначення функції і, $f'(x) = 0$, якщо $3x^2 - 3 = 0$, тобто при $x = 1$ або $x = -1$.
4. Розв'язуємо нерівності $f'(x) > 0$ і $f'(x) < 0$ на області визначення функції $f(x)$ методом інтервалів. Для цього відмічаємо точки 1 і (-1) на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ в кожному з одержаних проміжків (рис. 29).

Враховуючи достатні умови зростання і спадання функції, одержуємо, що в тих інтервалах, де похідна додатна, функція $f(x)$ зростає, а в тих інтервалах, де похідна від'ємна, функція $f(x)$ спадає. Отже, функція $f(x)$ зростає на кожному з інтервалів $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$ і спадає на інтервалі $(-1; 1)$. ◁

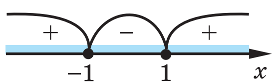


Рис. 29

Графік функції $y = x^3 - 3x$ зображено на рисунку 30. При побудові графіка враховано, що $f(-1) = 2$ і $f(1) = -2$. З графіка видно, що функція $f(x) = x^3 - 3x$ зростає не тільки на інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$, а й на проміжках

* Внутрішньою точкою множини називається така точка, яка належить цій множині разом з деяким своїм околом.

$(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$ і спадає не тільки на інтервалі $(-1; 1)$, а й на відрізку $[-1; 1]$.

Виявляється, що завжди, *коли функція $f(x)$ неперервна в будь-якому з кінців проміжку зростання (спадання), то його можна приєднати до цього проміжку* (як точки -1 і 1 у попередньому прикладі).

Приймемо це твердження без доведення.

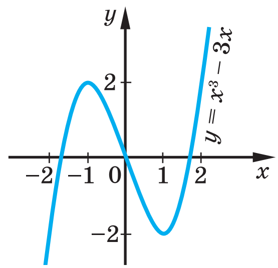


Рис. 30

2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції. На рисунку 30 зображено графік функції $y = x^3 - 3x$. Розглянемо окіл точки $x = -1$, тобто довільний інтервал, що містить точку -1 (наприклад, δ-окіл цієї точки). Як видно з рисунка, існує такий окіл точки $x = -1$, що найбільшого значення для точок з цього околу функція $f(x) = x^3 - 3x$ набуває в точці $x = -1$. Наприклад, на інтервалі $(-2; 0)$ найбільшого значення, яке дорівнює 2, функція набуває в точці $x = -1$. Точку $x = -1$ називають *точкою максимуму* цієї функції і позначають x_{max}, а значення функції в цій точці $f(-1) = 2$ називають *максимумом* функції.

Аналогічно точку $x = 1$ називають *точкою мінімуму* функції $f(x) = x^3 - 3x$, оскільки значення функції в цій точці менше за її значення в будь-якій точці деякого околу точки 1, наприклад, околу $(0{,}5; 1{,}5)$. Позначають точку мінімуму x_{min}, а значення функції в цій точці $f(1) = -2$ називають *мінімумом* функції. (Латинське слово *maximum* — максимум, що означає «найбільше», а *minimum* — мінімум — «найменше».)

Точки максимуму і мінімуму функції ще називають точками екстремуму, а значення функції в цих точках називають *екстремумами* функції (від латинського слова *extremum* — екстремум, що означає «крайній»). Наведемо означення точок максимуму і мінімуму.

Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається *точкою максимуму* цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ з цього околу виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 з області визначення функції $f(x)$ називається *точкою мінімуму* цієї функції, якщо знайдеться δ-окіл $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, такий, що для всіх $x \neq x_0$ із цього околу виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$.

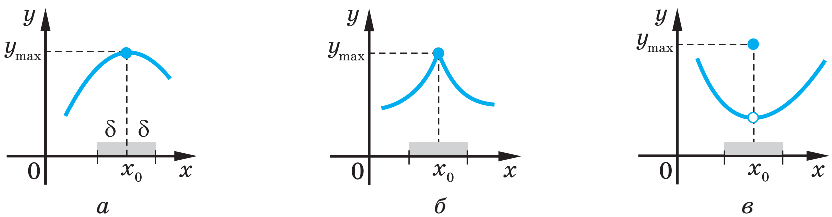


Рис. 31

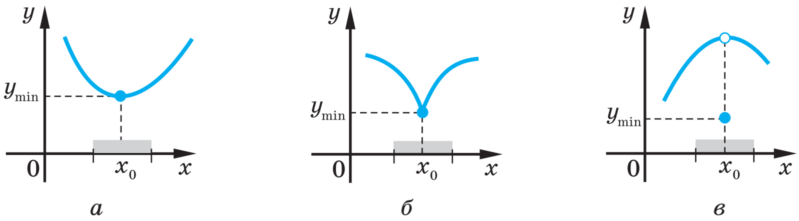


Рис. 32

За означенням значення функції $f(x)$ у точці максимуму x_0 є найбільшим серед значень функції з деякого околу цієї точки, тому графік функції $f(x)$ в околі x_0 найчастіше має вигляд гладенького «горба» (рис. 31, *а*), але може мати вигляд загостреного «піка» (рис. 31, *б*) чи навіть у точці максимуму може бути ізольована точка графіка (зрозуміло, що в цьому випадку функція не буде неперервною в точці x_0), у якій досягається найбільшого значення функції для деякого околу точки x_0 (рис. 31, *в*).

Аналогічно значення функції $f(x)$ у точці мінімуму x_0 є найменшим серед значень функції з деякого околу цієї точки, тому графік функції $f(x)$ в околі x_0 найчастіше має вигляд «западини», теж або гладенької (рис. 32, *а*), або загостреної (рис. 32, *б*), чи навіть у точці мінімуму може бути ізольована точка графіка, у якій досягається найменше значення функції для деякого околу точки x_0 (рис. 32, *в*).

Зауваження. За означенням точки екстремуму — це такі точки, у яких функція набуває найбільшого чи найменшого значення, порівнюючи із значеннями цієї функції в точках деякого околу екстремальної точки. Такий екстремум звичайно називають *локальним екстремумом* (від латинського *lokalis*, що означає «місцевий»). Наприклад, на рисунку 30 зображено графік функції $y = x^3 - 3x$, яка має локальний максимум у точці $x_{max} = -1$ ($y_{max} = 2$) і локальний мінімум у точці $x_{min} = 1$ ($y_{min} = -2$), але, як видно з графіка, на всій області визначення ця функція не має ні найбільшого, ні найменшого значення.

3. Необхідна і достатня умови екстремуму. При дослідженні функції і побудові її графіка важливе значення має знаходження точок екстремумів функції. Покажемо, що *точками екстремуму можуть бути тільки критичні точки функції*, тобто внутрішні точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує.

Теорема Ферма (необхідна умова екстремуму). ***Якщо x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то вона дорівнює нулю: $f'(x_0) = 0$.***

Доведемо це твердження методом від супротивного. Нехай x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$. Припустимо, що $f'(x_0) \neq 0$.

Розглянемо випадок, коли $f'(x_0) > 0$. За означенням похідної при $x \to x_0$ (тобто при $\Delta x \to 0$) відношення $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ прямує до додатного числа $f'(x_0)$, а отже, і саме буде додатним при всіх x, достатньо близьких до x_0. Для таких x

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

Тоді при $x > x_0$ одержуємо, що $f(x) > f(x_0)$ і точка x_0 не може бути точкою максимуму.

При $x < x_0$ одержуємо, що $f(x) < f(x_0)$ і точка x_0 не може бути точкою мінімуму. Тобто точка x_0 не може бути точкою екстремуму, що суперечить умові.

Аналогічно розглядається і випадок, коли $f'(x_0) < 0$. ○

Зазначимо, що теорема Ферма дає лише необхідну умову екстремуму: з того, що $f'(x_0) = 0$, не обов'язково випливає, що в точці x_0 функція має екстремум. Наприклад, якщо $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$. Але точка $x = 0$ не є точкою екстремуму, оскільки функція x^3 зростає на всій числовій прямій (рис. 33).

Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 (де x_0 — точка екстремуму функції) паралельна осі абсцис (або співпадає з нею) і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x_0)$ дорівнює нулю (рис. 34).

Зауважимо, що в точці з абсцисою $x_0 = 0$ до графіка функції $y = x^3$ теж можна провести дотичну: оскільки $f'(0) = 0$, то цією дотичною є вісь Ox. Але графіки функцій, наведених на рисунках 33 і 34, по-різному розміщаються відносно дотичних. На рисунку 34, де x_0 і x_1 — точки екстремуму, можна вказати околи цих точок, для яких відповідні точки графіка розміщуються по один бік від дотичної, а на рисунку 33 *графік функції $y = x^3$ при переході аргументу через точку $x_0 = 0$* (у якій похідна дорівнює нулю,

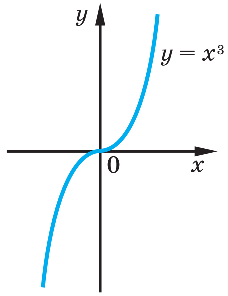


Рис. 33

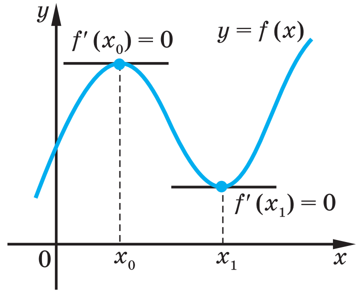


Рис. 34

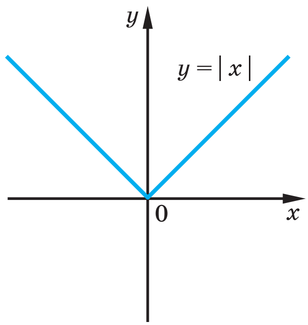


Рис. 35

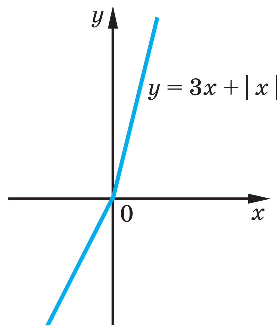


Рис. 36

але яка не є точкою екстремуму) *переходить з одного боку дотичної до іншого*. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою перегину** *функції*.

Функція може мати екстремум і в тій критичній точці, у якій не існує похідна заданої функції. Наприклад, як було показано на с. 39, функція $y = |x|$ не має похідної в точці $x = 0$, але, як видно з її графіка (рис. 35), саме в цій точці функція має мінімум.

Але не кожна критична точка, у якій не існує похідна заданої функції, буде точкою екстремуму цієї функції. Наприклад, розглядаючи функцію $f(x) = 3x + |x|$, помічаємо, що вона не має похідної в точці $x = 0$: графік має злом при $x = 0$ (рис. 36). Дійсно, якщо припустити, що функція $f(x) = 3x + |x|$ має похідну в точці 0, то функція $f(x) - 3x$ теж повинна мати похідну в точці 0. Але $f(x) - 3x = |x|$, а функція $|x|$ не має похідної в точці 0, тобто ми прийшли до суперечності. Отже, функція $f(x)$ у точці 0 похідної не має. Але, як видно з рисунка 36, функція $f(x)$ зростає на всій числовій прямій і екстремуму не має.

Наведені міркування і приклади показують, що для знаходження точок екстремуму функції потрібно насамперед знайти її критичні точки. Але для з'ясування того, чи є відповідна критична точка точкою екстремуму, необхідно провести додаткове дослідження. Цьому часто допомагають достатні умови існування екстремуму в точці.

Теорема 1 (ознака максимуму функції). ***Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і при переході через точку x_0 її похідна змінює знак з «плюса» на «мінус» (тобто в деякому δ-околі точки x_0 при $x < x_0$ значення $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ значення $f'(x) < 0$), то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$.***

Розглянемо заданий δ-окіл точки x_0, тобто інтервал $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. За умовою похідна $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ (при $x < x_0$). Отже, функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі, а, враховуючи неперервність $f(x)$

* Більш детально про точки перегину див. на с. 149 .

у точці x_0, функція $f(x)$ зростає і на проміжку $(x_0 - \delta;\ x_0]$. Тоді для всіх x з інтервалу $(x_0 - \delta;\ x_0)$ маємо $x < x_0$, отже, $f(x) < f(x_0)$.

Аналогічно за умовою похідна $f'(x) < 0$ на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$ (при $x > x_0$). Отже, функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі, а, враховуючи неперервність $f(x)$ у точці x_0, функція $f(x)$ спадає і на проміжку $[x_0;\ x_0 + \delta)$. Тоді для всіх x з інтервалу $(x_0;\ x_0 + \delta)$ маємо $x > x_0$, отже, $f(x) < f(x_0)$.

Таким чином, $f(x) < f(x_0)$ для всіх $x \neq x_0$ із деякого δ-околу точки x_0, а це й означає, що точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$. ○

Т е о р е м а 2 (ознака мінімуму функції). ***Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і при переході через точку x_0 її похідна змінює знак з «мінуса» на «плюс» (тобто в деякому δ-околі точки x_0 при $x < x_0$ значення $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ значення $f'(x) > 0$), то точка x_0 є точкою мінімуму функції $f(x)$.***

Доведення цієї теореми повністю аналогічне до доведення теореми 1 (пропонуємо провести його самостійно).

Теореми 1 і 2 дають можливість зробити такий висновок: *якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і похідна $f'(x)$ змінює знак при переході через точку x_0, то x_0 — точка екстремуму функції $f(x)$.*

Якщо ж функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і її похідна $f'(x)$ не змінює знак при переході через точку x_0, то точка x_0 не може бути точкою екстремуму функції.

● Дійсно, якщо, наприклад, $f'(x) > 0$ на інтервалі $(x_0 - \delta;\ x_0)$ і на інтервалі $(x_0;\ x_0 + \delta)$, то функція зростає на кожному з цих інтервалів. Враховуючи її неперервність у точці x_0 (див. доведення теореми 1), одержуємо, що для всіх $x \in (x_0 - \delta;\ x_0)$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ і для всіх $x \in (x_0;\ x_0 + \delta)$ виконується нерівність $f(x_0) < f(x)$. Це означає, що на всьому проміжку $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ зростає і точка x_0 не є точкою екстремуму. Аналогічно розглядається і випадок, коли $f'(x) < 0$ на розглянутих інтервалах. ○

З а у в а ж е н н я. Наведене обґрунтування дозволяє уточнити умови зростання і спадання функції.

Якщо $f'(x) \geqslant 0$ у кожній точці інтервалу $(a;\ b)$ (причому рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну або зчисленну множину коренів), то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі.*

Якщо $f'(x) \leqslant 0$ у кожній точці інтервалу $(a;\ b)$ (причому рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну або зчисленну множину коренів), то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

Для практичного *дослідження функції на екстремуми* можна використовувати уточнений варіант схеми, наведеної на с. 68, а саме:

---

* Зчисленність множини означає, що ми можемо встановити взаємно однозначну відповідність між елементами заданої множини і натуральними числами, тобто можемо вказати, як занумерувати всі елементи множини.

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Знайти похідну $f'(x)$.*
3. *Знайти критичні точки (*тобто *внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує*).
4. *Позначити критичні точки на області визначення, знайти знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.*
5. *Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи вона не є точкою екстремуму.*

Приклад використання цієї схеми до дослідження функції на екстремум наведено в таблиці 6 (с. 63) та в прикладі 2, наведеному далі.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Функція $y = f(x)$ означена на проміжку $(-7; 8)$. На рисунку 37 зображено графік її похідної.

1) Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

2) Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму, а які не є точками екстремуму.

Розв'язання

1) ▶ За графіком маємо, що $f'(x) > 0$ на проміжках $(-4; 2)$ та $(6; 8)$, отже, $f(x)$ зростає на цих проміжках. Аналогічно $f'(x) < 0$ на проміжках $(-7; -4)$ та $(2; 6)$, отже, $f(x)$ спадає на цих проміжках. Оскільки в точках -4, 2 і 6 існує похідна $f'(x)$, то функція $f(x)$ неперервна в цих точках і тому ці точки можна включити до її проміжків зростання та спадання.

Відповідь: $f(x)$ зростає на проміжках $[-4; 2]$ та $[6; 8)$ і спадає на проміжках $(-7; -4]$ та $[2; 6]$. ◁

2) ▶ Похідна $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ і дорівнює нулю в точках -4, 2 і 6. Це внутрішні точки області визначення, отже, критичними точками будуть тільки точки -4, 2 і 6. Оскільки похідна існує на всій області визначення функції, то

Коментар

1) Як відомо, *на тих проміжках, де похідна функції додатна, функція зростає, а на тих проміжках, де похідна від'ємна, — спадає.* Тому за графіком з'ясовуємо проміжки, у яких похідна додатна і в яких — від'ємна. Це і будуть проміжки зростання і спадання функції.

2) *Критичні точки — це внутрішні точки області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує.* За графіком бачимо, що похідна $f'(x)$ існує на всій заданій області визначення. Отже, критичними точками будуть тільки ті значення x, при яких похідна дорівнює нулю.

Для визначення того, чи є критична точка точкою екстремуму, використовуємо достатні умови екстремуму: *якщо в критичній точці*

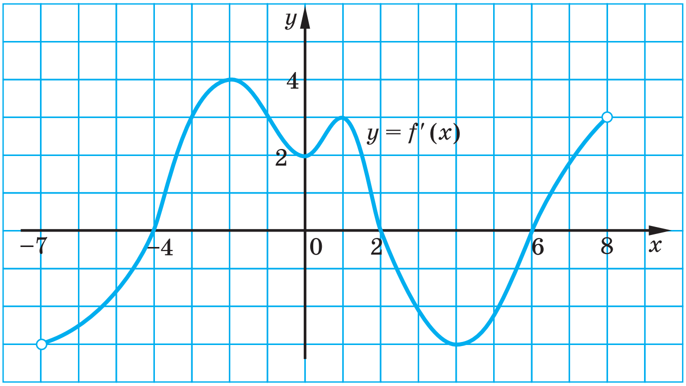


Рис. 37

функція неперервна в кожній точці області визначення.

У точках −4 і 6 похідна змінює знак з «−» на «+», отже, це точки мінімуму.

У точці 2 похідна змінює знак з «+» на «−», отже, це точка максимуму.

Відповідь: $x_{1\,\min} = -4$, $x_{2\,\min} = 6$, $x_{\max} = 2$.

функція неперервна і її похідна змінює знак з «+» на «−», то ця критична точка є точкою максимуму, а якщо з «−» на «+», то точкою мінімуму.

Приклад 2 Для функції $f(x) = x + \frac{25}{x}$ знайдіть проміжки монотонності, точки екстремуму і значення функції в точках екстремуму.

Розв'язання

1. Область визначення, $D(f)$: $x \neq 0$, тобто $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. $f'(x) = x' + 25\left(\frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{25}{x^2}$.

3. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$.

$f'(x) = 0$. Тоді, $1 - \frac{25}{x^2} = 0$, отже, $x^2 = 25$, тобто $x = 5$ та $x = -5$ — критичні точки.

Коментар

Досліджувати функцію на монотонність та екстремум можна за схемою:

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Знайти похідну $f'(x)$.*
3. *Знайти критичні точки* (тобто *внутрішні точки області визначення, у яких $f'(x)$ дорівнює нулю або не існує*).
4. *Позначити критичні точки на області визначення, знайти*

4. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 38).

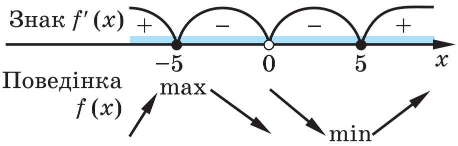


Рис. 38

Одержуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty; -5]$ і $[5; +\infty)$ і спадає на проміжках $[-5; 0)$ і $(0; 5]$. У точці -5 похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, це точка максимуму; у точці 5 похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, це точка мінімуму. Тобто $x_{max} = -5$, $x_{min} = 5$.
Тоді $y_{max} = f(-5) = -10$,
$y_{min} = f(5) = 10$. ◁

знак похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.

5. *Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи вона не є точкою екстремуму.*

Функція неперервна в кожній точці області визначення (вона диференційовна в кожній точці області визначення) і тому, записуючи проміжки зростання і спадання функції, критичні точки можна включити до цих проміжків. Для з'ясування того, чи є критична точка точкою екстремуму, використовуємо достатні умови екстремуму.

З а у в а ж е н н я. Результати дослідження функції на монотонність і екстремуми зручно фіксувати не тільки у вигляді схеми, зображеної на рисунку в розв'язанні прикладу 2, а й у вигляді спеціальної таблиці такого виду:

x	$(-\infty; -5)$	-5	$(-5; 0)$	$(0; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	−	0	+
$f(x)$	↗	−10	↘	↘	10	↗
		max			min	

Приклад 3* Для заданої функції знайдіть проміжки монотонності, точки екстремуму і екстремуми функції:
1) $f(x) = x^3 - 12|x + 1|$; 2) $\varphi(x) = 4\cos x - \cos 2x$.

К о м е н т а р

Для дослідження заданих функцій знову використаємо схему, наведену на с. 73.

У завданні 1 використаємо означення модуля і окремо знайдемо похідну при $x < -1$ і при $x > -1$. А щоб з'ясувати, чи існує похідна $f'(x)$ при $x = -1$, спробуємо знайти значення $f'(-1)$ за обома формулами і порівняти їх*. Щоб зайти точки, у яких $f'(x) = 0$, прирівняємо до нуля значення похідної $f'(x)$ при $x < -1$ і при $x > -1$ і врахуємо відповідні обмеження для x.

У завданні 2 врахуємо, що рівняння $\varphi'(x) = 0$ — це тригонометричне рівняння, яке має нескінченну множину коренів, тобто функція $\varphi(x)$ має нескінченну кількість критичних точок. Через це позначити всі критичні точки на області визначення функції (як це пропонується в схемі дослідження функції) ми не в змозі. У такому випадку можна спробувати безпосередньо використати достатні ознаки зростання і спадання функції (тобто розв'язати нерівності $\varphi'(x) > 0$ та $\varphi'(x) < 0$) або у випадку, коли функція $\varphi'(x)$ є періодичною, провести дослідження поведінки $\varphi'(x)$ на одному періоді, а потім результат повторити через період. Зауважимо, що у випадку, коли $\varphi'(x)$ означена на всьому періоді і ми знаємо проміжки, де виконується нерівність $\varphi'(x) > 0$, та точки, де виконується рівність $\varphi'(x) = 0$, для всіх точок періоду, що залишилися, обов'язково буде виконуватися нерівність $\varphi'(x) < 0$.

Р о з в ' я з а н н я

1) ▶ Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Запишемо задану функцію так:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 12x - 12 \text{ при } x \geqslant -1, \\ x^3 + 12x + 12 \text{ при } x < -1. \end{cases}$$ Тоді

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 12 \text{ при } x > -1, & (1) \\ 3x^2 + 12 \text{ при } x < -1. & (2) \end{cases}$$

Похідна $f'(x)$ не існує в точці $x = -1$, оскільки значення $f'(-1)$, обчислені за формулами (1) і (2), різні ($-9 \neq 15$), отже, $x = -1$ — критична точка функції $f(x)$. Значення $f'(x)$, обчислене за формулою (2), не може дорівнювати нулю ($3x^2 + 12 \neq 0$). Для формули (1) маємо $3x^2 - 12 = 0$, тобто $x = 2$ та $x = -2$, але, враховуючи умову $x > -1$, одержуємо, що тільки $x = 2$ є критичною точкою. Отже, функція $f(x)$ має дві критичні точки: 2 і (-1).

Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з проміжків (рис. 39). Одержуємо, що функція $f(x)$ зростає на проміжках $(-\infty; -1]$ і $[2; +\infty)$ і спадає на проміжку $[-1; 2]$.

У точці (-1) похідна змінює знак з плюса на мінус, отже, це точка максимуму. У точці 2 похідна змінює знак з мінуса на плюс, отже, це точка мінімуму. Тоді $x_{max} = -1$, $y_{max} = f(-1) = -1$, $x_{min} = 2$, $y_{min} = f(2) = -28$. ◁

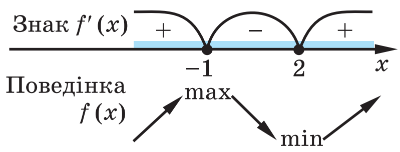


Рис. 39

2) ▶ Область визначення: $D(\varphi) = \boldsymbol{R}$.
Похідна: $\varphi'(x) = (4\cos x - \cos 2x)' = -4\sin x + 2\sin 2x = -4\sin x + 4\sin x\cos x = 4\sin x(\cos x - 1)$.

Критичні точки: похідна $\varphi'(x)$ існує на всій області визначення функції $\varphi(x)$, отже, критичними точками будуть всі значення x, для яких $\varphi'(x) = 0$.

---

* Фактично ми будемо порівнювати значення так званих *односторонніх похідних* функції $f(x)$ у точці (-1). Ці похідні означаються аналогічно до односторонніх границь функції (див. с. 119).

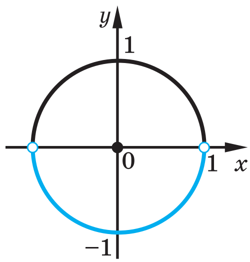


Рис. 40

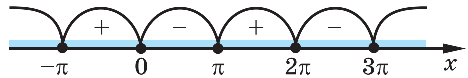


Рис. 41

$4 \sin x (\cos x - 1) = 0$. Тоді $\sin x = 0$ або $\cos x = 1$. Отже, $x = \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, або $x = 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. (Значення $2\pi k$ дає також і формула πn (при $n = 2k$), тому всі критичні точки можна задати формулою πn, $n \in \mathbf{Z}$.)

Функція $\varphi(x)$ зростає в тих точках її області визначення, де $\varphi'(x) > 0$. Маємо:

$$4 \sin x (\cos x - 1) > 0, \text{ тоді } \begin{cases} \sin x > 0, \\ \cos x > 1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x < 1. \end{cases}$$

Перша з цих систем не має розв'язків ($\cos x$ не може бути більшим за 1), а друга система має розв'язки (рис. 40): $\pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Похідна $\varphi'(x) = 4 \sin x (\cos x - 1)$ є періодичною функцією (відносно змінної x) з періодом 2π (це спільний період для функцій $\sin x$ і $\cos x$). На періоді $[0; 2\pi]$ нерівність $\varphi'(x) > 0$ виконується на проміжку $(\pi; 2\pi)$, а рівність $\varphi'(x) = 0$ у точках πn, тобто в точках 0, π і 2π. Тоді нерівність $\varphi'(x) < 0$ виконується на проміжку $(0; \pi)$, а, враховуючи період, і на всіх проміжках $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Враховуючи умови зростання і спадання функції і те, що функція $\varphi(x)$ неперервна на всій числовій прямій (вона диференційовна у всіх точках), одержуємо, що функція $\varphi(x)$ зростає на кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$, і спадає на кожному з проміжків $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Оскільки похідна $\varphi'(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π, то через проміжок довжиною 2π знаки похідної $\varphi'(x)$ повторюються (рис. 41).

У точці 0 похідна $\varphi'(x)$ змінює знак з плюса на мінус, отже, $x = 0$ — точка максимуму, а враховуючи, що поведінка $\varphi'(x)$ повторюється через 2π, маємо, що

$$x_{max} = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \text{ Тоді } y_{max} = \varphi(2\pi k) = 4 \cos(2\pi k) - \cos(4\pi k) = 3.$$

У точці π похідна $\varphi'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс, отже, $x = \pi$ — точка мінімуму, а враховуючи, що поведінка $\varphi'(x)$ повторюється через 2π, маємо, що $x_{min} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}$. Тоді $y_{min} = \varphi(\pi + 2\pi k) = 4 \cos(\pi + 2\pi k) - \cos(2\pi + 4\pi k) = -5$. ◁

Запитання для контролю

1. Дайте означення зростаючої та спадної на множині функції. Наведіть приклади таких функцій та їх графіків.
2. а) Сформулюйте достатні умови зростання та спадання функції. Наведіть приклади їх застосування.

б*) Обґрунтуйте достатні умови зростання та спадання функції.

3*. Сформулюйте і обґрунтуйте умову сталості функції на інтервалі.

4. Зобразіть графік функції, що має екстремуми. Дайте означення точок екстремуму функції та її екстремумів.

5. Які точки називаються критичними точками ?

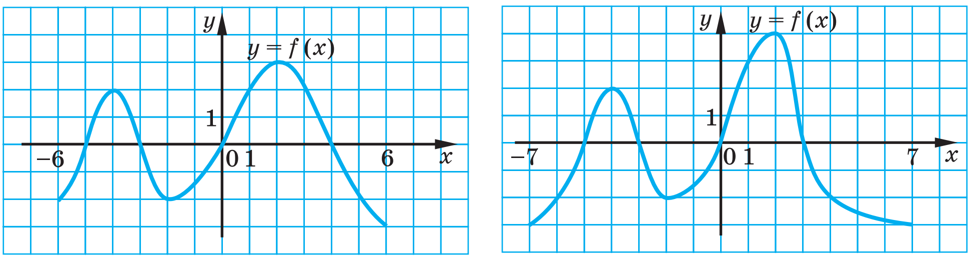
6. а) Сформулюйте необхідну умову екстремуму функції.
б*) Обґрунтуйте необхідну умову екстремуму функції.

7. а) Сформулюйте достатню умову існування екстремуму в точці.
б*) Обґрунтуйте достатню умову існування екстремуму в точці.

8. За якою схемою можна досліджувати функцію на монотонність та екстремум? Наведіть приклад такого дослідження.

Вправи

1°. На рисунку 42 зображено графік функції $y = f(x)$ (на рисунку 42, *а*, функція задана на проміжку $[-6; 6]$, а на рисунку 42, *б* — на проміжку $[-7; 7]$). Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.



а *б*

Рис. 42

2°. Відомо, що похідна деякої функції $y = f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як на рисунку 43. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

3. Функція $y = f(x)$ означена на проміжку $(-6; 3)$. На рисунку 44 зображено графік її похідної. Укажіть проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.

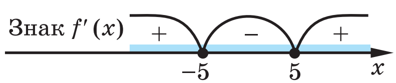


Рис. 43

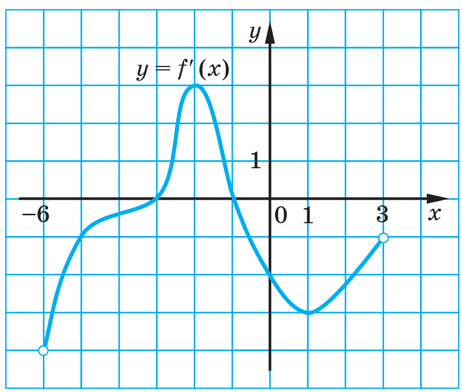


Рис. 44

4. Доведіть, що задана функція зростає на всій області визначення:
1°) $f(x) = x^3 + 5x$; 2) $f(x) = e^x + x - 7$;
3) $f(x) = 2x + \cos x$; 4) $f(x) = \sin x + 3x + 2$.

5. Доведіть, що задана функція спадає на всій області визначення:
1°) $y = -x^3 - 3x$; 2) $f(x) = -x^7 - e^x + 2$;
3) $f(x) = \cos x - 6x$; 4) $f(x) = \sin x - 2x + 1$.

Знайдіть проміжки зростання і спадання функції **(6–7)**.

6. 1°) $f(x) = x^2 - 2x$; 2) $f(x) = x^3 - 24x + 2$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 4) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

7. 1) $y = e^x - x$; 2) $y = x - \ln x$;
3*) $y = x + 2\cos x$; 4*) $y = x - \sin 2x$.

8*. Знайдіть всі значення параметра a, при яких функція зростає на всій числовій прямій:
1) $f(x) = x^3 - 3ax$; 2) $f(x) = ax + \cos x$; 3) $f(x) = x^3 + ax^2 + 3ax - 5$.

9*. Доведіть, що рівняння має єдиний корінь, і знайдіть цей корінь:
1) $2x^3 + 3x - 5 = 0$; 2) $e^x + 2x - 1 = 0$;
3) $5x - \cos 3x - 5\pi = 1$; 4) $\frac{1}{x} - \ln x = 1$.

10°. За графіком функції $y = f(x)$, зображеним на рисунку 42, знайдіть точки максимуму і мінімуму функції $f(x)$. Чи існує похідна у кожній із цих точок? Якщо існує, то чому дорівнює її значення?

11°. Відомо, що похідна деякої функції $y = f(x)$, заданої на множині всіх дійсних чисел, має такі знаки, як на рисунку 43, і $f'(-5) = f'(5) = 0$. Укажіть критичні точки функції, точку максимуму і точку мінімуму цієї функції.

12°. Користуючись даними про похідну $f'(x)$, наведеними в таблиці,

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 5)$	5	$(5; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

укажіть:
1) проміжки зростання і спадання функції $f(x)$;
2) точки максимуму і точки мінімуму функції $f(x)$.

13. Функція $y = f(x)$ означена на проміжку $(-6; 3)$. На рисунку 44 зображено графік її похідної. Знайдіть критичні точки функції. Визначте, які з них є точками максимуму, які — точками мінімуму, а які не є точками екстремуму.

Дослідіть задану функцію на екстремуми **(14–15)**.

14°. 1) $f(x) = 1 + 12x - x^3$; 2) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$;
3) $f(x) = x^4 - 8x^3$; 4) $f(x) = 5x - x^5$.

15. 1) $y=\sqrt{1-x^2}$; 2) $y = x - 3\ln x$;
3) $y = xe^{-x}$; 4) $y = x^2 - 2\ln x$.

Визначте проміжки монотонності, точки екстремуму функції і значення функції в точках екстремуму **(16–17)**.

16. 1°) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; 2°) $f(x) = x^4 - 2x^2$;
3) $f(x)=x+\frac{4}{x}$; 4) $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

17*. 1) $y=\frac{x}{\ln x}$; 2) $y = x^2 - |x| - 1$;
3) $y = 6x^3 - 2|x - 1|$; 4) $y=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$.

6.2. Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка

Таблиця 7

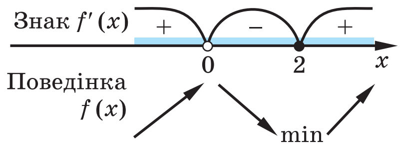
Схема дослідження функції	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Побудуйте графік функції $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$. ▶ 1. Область визначення: $x \neq 0$ (тобто $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною (чи періодичною*).	2. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.
3. Точки перетину графіка з осями координат (якщо можна знайти).	3. Графік не перетинає вісь Oy $(x \neq 0)$. На осі Ox $y = 0$: $x+\frac{4}{x^2}=0$, $x^3 = -4$, $x=-\sqrt[3]{4}$ $(\approx -1{,}6)$ — абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки функції.	4. $f'(x)=x'+\left(\frac{4}{x^2}\right)'=1-\frac{8}{x^3}$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення). $f'(x)=0$; $1-\frac{8}{x^3}=0$. При $x\neq 0$ маємо: $x^3 = 8$; $x = 2$ — критична точка.

* Найчастіше періодичність доводиться встановлювати для тригонометричних функцій.

Продовж. табл. 7

5. Проміжки зростання і спадання функції та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).

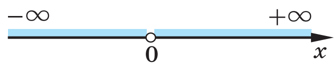
5. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення (див. рисунок).



Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $[2; +\infty)$ і спадає на проміжку $(0; 2]$. Оскільки в критичній точці 2 похідна змінює знак з «–» на «+», то $x = 2$ — точка мінімуму: $x_{min} = 2$.

Тоді $y_{min} = f(2) = 3$.

6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення (цей етап не входить до мінімальної схеми дослідження функції).



6. При $x \to 0$ справа (і при $x \to 0$ зліва)

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2} \to \left(\frac{4}{+0}\right) \to +\infty^{*}.$$

При $x \to -\infty$ (і при $x \to +\infty$) значення $\frac{4}{x^2} \to 0$, тоді $f(x) \to x^{**}$ (тобто при $x \to -\infty$ $f(x) \to -\infty$ і при $x \to +\infty$ $f(x) \to +\infty$).

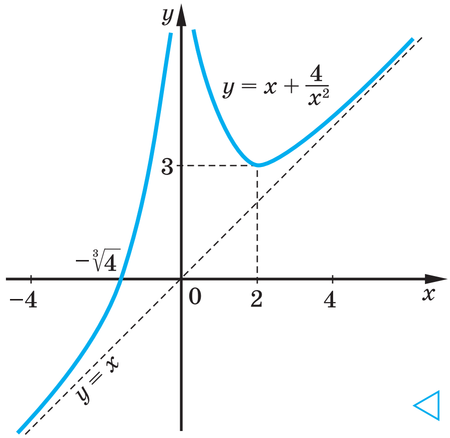
7. Якщо необхідно, знайти координати додаткових точок, щоб уточнити поведінку графіка функції.

x	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	4	-4
y	$16\frac{1}{2}$	$15\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{4}$	$-3\frac{3}{4}$

* У цьому випадку говорять, що $x = 0$ — вертикальна асимптота графіка функції $f(x)$ (див. с. 131).

** У цьому випадку говорять, що $y = x$ — похила асимптота графіка функції $f(x)$.

Продовж. табл. 7

8. На основі проведеного дослідження побудувати графік функції.	

Пояснення й обґрунтування

Для побудови графіка функції (особливо в тих випадках, коли мова йде про побудову графіків незнайомих функцій) доцільно використовувати схему дослідження тих властивостей функції, які допомагають скласти певне уявлення про вид її графіка. Коли таке уявлення вже складене, то після цього можна виконувати побудову графіка функції за знайденими характерними точками. Фактично ми будемо користуватися тією схемою дослідження функції, яка була наведена в підручнику 10 класу (с. 57), тільки для дослідження функції на зростання та спадання і екстремуми використаємо похідну. Тобто для побудови графіка функції можна досліджувати функцію за схемою: 1) *знайти область визначення функції*; 2) *дослідити функцію на парність (або непарність) та періодичність*; 3) *знайти точки перетину графіка з осями координат*; 4) *знайти похідну і критичні точки функції*; 5) *знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках)*; 6) *дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення*; 7) *якщо необхідно, знайти координати додаткових контрольних точок*; 8) *на основі проведеного дослідження побудувати графік функції*.

Відзначимо, що ця схема є орієнтовною і не завжди потрібно виконувати її повністю. Наприклад, далеко не завжди можна точно знайти точки перетину графіка з віссю *Ox*, навіть якщо ми знаємо, що такі точки існують. Також часто достатньо складно дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення. У такому випадку уточнити поведінку графіка функції можна за рахунок знаходження координат точок графіка функції, абсциси яких вибирають так, щоб вони наближалися до кінців проміжків області визначення.

Охарактеризуємо особливості виконання кожного з вказаних етапів дослідження функції і особливості врахування одержаних результатів при побудові графіка функції.

1) При побудові графіка функції перш за все потрібно з'ясувати і записати її *область визначення*. Якщо немає спеціальних обмежень, то функція вважається заданою при всіх тих значеннях аргументу, при яких існують всі вирази, що входять до запису функції. Обмеження, які потрібно враховувати в цьому випадку при знаходженні області визначення функції, наведено в таблиці 8.

Таблиця 8

Вид функції		Обмеження, які враховують при знаходженні області визначення функції*	
1	$y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x)\neq 0$	*Знаменник дробу не дорівнює нулю*
2	$y=\sqrt[2k]{f(x)}$ $(k\in N)$	$f(x)\geqslant 0$	*Під знаком кореня парного степеня може стояти лише невід'ємний вираз*
3	$y=\lg(f(x))$	$f(x)>0$	*Під знаком логарифма може стояти лише додатний вираз*
4	$y=\log_{f(x)} a$ $(a>0)$	$\begin{cases} f(x)>0, \\ f(x)\neq 1 \end{cases}$	*В основі логарифма може стояти лише додатний вираз, що не дорівнює одиниці*
5	$y=\mathrm{tg}(f(x))$	$f(x)\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,$ $(k\in Z)$	*Під знаком тангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ (k — *ціле*)
6	$y=\mathrm{ctg}(f(x))$	$f(x)\neq\pi k,$ $k\in Z$	*Під знаком котангенса може стояти лише вираз, що не дорівнює* πk (k — *ціле*)
7	$y=\arcsin(f(x))$	$\lvert f(x)\rvert\leqslant 1,$ **тобто** $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$	*Під знаками арксинуса і арккосинуса може стояти лише вираз, модуль якого менше або дорівнює одиниці*
8	$y=\arccos(f(x))$		
9	$y=x^{\alpha}$		
	а) α — *натуральне*	x — **будь-яке число**	
	б) α — *ціле від'ємне або нуль*	$x\neq 0$	
	в) α — *додатне неціле число*	$x\geqslant 0$	
	г) α — *від'ємне неціле число*	$x>0$	

* При записуванні цих обмежень вважаємо, що функції $f(x)$ і $g(x)$ означені на розглядуваній множині.

Після знаходження області визначення функції часто корисно відмітити її на осі абсцис. Якщо область визначення — вся числова пряма, то ніяких відміток можна не виконувати. Якщо ця область — проміжок числової прямої, то корисно провести вертикальні прямі через його кінці. Ці прямі обмежать смугу, у якій буде знаходитися графік функції. Якщо окремі точки не входять до області визначення функції, то доцільно відмітити їх на осі абсцис і провести через них вертикальні прямі (які не буде перетинати графік функції).

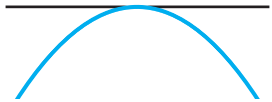
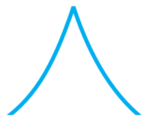
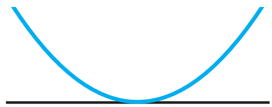
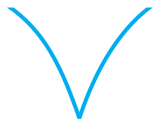
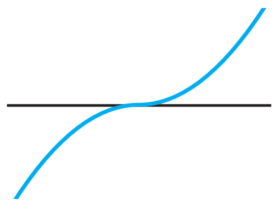
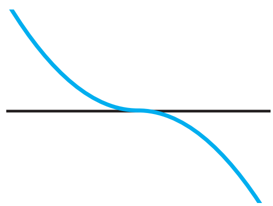
2) Якщо з'ясується, що задана *функція є парною (або непарною)*, то можна дослідити властивості і побудувати її графік тільки при $x \geqslant 0$, а потім відобразити його симетрично відносно осі Oy (для непарної функції — симетрично відносно початку координат). Якщо ж функція періодична, то достатньо побудувати її графік на одному відрізку завдовжки T, а потім повторити його на кожному з проміжків довжиною T (тобто паралельно перенести графік уздовж осі Ox на Tk, де k — ціле число).
   Нагадаємо, що для обґрунтування парності функції достатньо перевірити, що для всіх x з її області визначення $f(-x) = f(x)$; для непарності — перевірити виконання рівності $f(-x) = -f(x)$, а для періодичності — рівності $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$, (де $T \neq 0$).
   Зауважимо, що парність, непарність і періодичність функції досліджують для того, щоб полегшити побудову графіка функції. Якщо ж функція не є ні парною, ні непарною і не є періодичною, то знання цих характеристик мало допомагає в побудові графіка функції.
3) Щоб знайти *точки перетину графіка з осями координат*, враховуємо, що на осі Oy значення $x = 0$ (тоді $y = f(0)$, звичайно, якщо це значення існує). На осі Ox значення $y = 0$, і тому, щоб знайти відповідні значення x, прирівнюємо задану функцію до нуля і знаходимо корені одержаного рівняння (якщо це рівняння вдається розв'язати).
4) Для подальшого дослідження функції корисно знайти похідну і критичні точки функції. Нагадаємо, що критичні точки функції — це внутрішні точки її області визначення, у яких похідна дорівнює нулю або не існує. Також нагадаємо, що на всіх проміжках, де існує похідна заданої функції, ця функція є неперервною і її графіком на кожному з проміжків буде нерозривна лінія.
5) Використовуючи похідну і критичні точки функції, знаходимо проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції (і значення функції в цих точках). Нагадаємо, що для цього доцільно відмітити критичні точки функції на її області визначення і знайти знаки похідної в кожному з проміжків, на які розбивається область визначення. Відзначимо, що висновок про зростання чи спадання функції на проміжку між критичними точками часто можна зробити, порівнявши значення функції на кінцях цього проміжка (замість знаходження знака похідної).

Як відзначалося на с. 76, результати цього етапу дослідження можна оформляти у вигляді спеціальної таблиці , яка містить такі рядки:

Значення x
Знак і значення $f'(x)$
Поведінка і значення $f(x)$

Після знаходження значення функції в кожній критичній точці x_0 будуємо відповідні точки на координатній площині, враховуючи поведінку графіка функції в околі точки x_0 (табл. 9).

Таблиця 9

Критична точка x_0	Поведінка $f'(x)$	Орієнтовний вид графіка функції $f(x)$ в околі точки x_0
x_0 — точка максимуму	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з плюса на мінус*	
	$f'(x_0)$ не існує, *$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з плюса на мінус*	
x_0 — точка мінімуму	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з мінуса на плюс*	
	$f'(x_0)$ не існує, *$f'(x)$ змінює знак у точці x_0 з мінуса на плюс*	
x_0 — критична точка, у якій похідна дорівнює нулю, яка не є точкою екстремуму (це *точка перегину* графіка функції)	**$f'(x_0) = 0$,** *$f'(x)$ зліва і справа від точки x_0 додатна*	
	$f'(x_0) = 0$, *$f'(x)$ зліва і справа від точки x_0 від'ємна*	

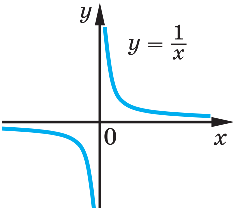


Рис. 45

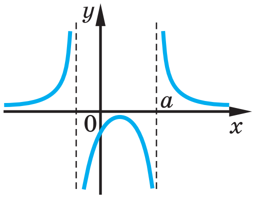


Рис. 46

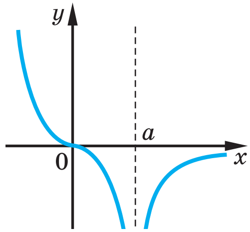


Рис. 47

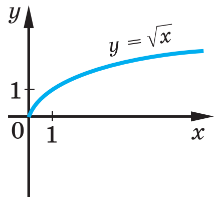


Рис. 48

При зображенні графіка функції в околі точки x_0 враховано геометричний зміст похідної, а саме: якщо $f'(x_0)=0$, то в точці з абсцисою x_0 до графіка функції $y=f(x)$ можна провести дотичну, паралельну осі Ox. Якщо ж значення $f'(x_0)$ не існує, то в точці з абсцисою x_0 графік матиме злом (або дотичну до графіка функції в цій точці не можна провести, або дотична перпендикулярна до осі Ox).

6) Для того щоб скласти краще уявлення про вид графіка функції, доцільно дослідити *поведінку функції на кінцях області визначення*. При цьому можливо декілька випадків.

а) Біля точки $x=a$, яка обмежує проміжок області визначення, значення функції прямує до нескінченності. Наприклад, у функції $y=\frac{1}{x}$ область визначення — $x\neq 0$, тобто $D(y)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, і якщо значення x прямує до нуля, то значення y прямує до нескінченності (рис. 45).
Як було відзначено в пункті 1, через точку $x=a$ уже проведено вертикальну пряму. Біля точки $x=a$ графік функції буде прямувати вгору або вниз, наближаючись до цієї прямої. Цю пряму називають *вертикальною асимптотою** графіка функції. Щоб з'ясувати, вгору чи вниз прямуватиме графік функції, достатньо визначити знаки функції зліва і справа від точки a. Характерні випадки зображено на рисунках 46, 47.

б) Якщо *гранична точка $x=a$ входить до області визначення функції*, то потрібно визначити значення функції в точці a і побудувати одержану точку. Типовий приклад — точка $x=0$ для функції $y=\sqrt{x}$ (рис. 48).

в) До області визначення функції входить нескінченний проміжок (або вся числова пряма, або проміжки $(-\infty;a)$ чи $(a;+\infty)$). У цьому випадку корисно уявити собі поведінку графіка функції при $x\to-\infty$ чи при $x\to+\infty$.
Наприклад, для функції $y=\frac{1}{x}$ маємо: при $x\to+\infty$ значення $y\to 0$, залишаючись додатним (це можна записати так: $y\to+0$). А при $x\to-\infty$ значення $y\to 0$, залишаючись від'ємним (це можна записати так: $y\to-0$). У цьому випадку говорять, що пряма $y=0$ — *горизонтальна асимптота* графіка функції (див. рис. 45).

* Пряма, до якої необмежено наближається крива при віддаленні її в нескінченність, називається асимптотою цієї кривої (докладніше див. на с. 131).

Інколи при $x \to +\infty$ чи при $x \to -\infty$ можна виділити похилу пряму, до якої необмежено наближається графік функції, — так звану *похилу асимптоту*, яка теж дозволяє краще уявити поведінку графіка функції (див. приклад у таблиці 7).

7) Якщо після вказаного дослідження ще потрібно уточнити поведінку графіка функції (наприклад, у тому випадку, коли на якомусь нескінченному проміжку області визначення функція зростає від $-\infty$ до $+\infty$), то корисно знайти *координати додаткових точок* графіка, взявши довільні значення аргументу з потрібного проміжку.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Побудуйте графік функції $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

Розв'язання

1. Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Функція не є ні парною, ні непарною, оскільки $f(-x) = -x^3 + 3x - 3 \neq$ $\neq f(x)$ (і $f(-x) \neq -f(x)$).
3. Точка перетину графіка з віссю Oy: $x = 0$, $y = f(0) = -3$.
4. Похідна і критичні точки. $f'(x) = 3x^2 - 3$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$. $f'(x) = 0$. Тоді $3x^2 - 3 = 0$, отже, $x^2 = 1$, тобто $x = 1$ та $x = -1$ — критичні точки.
5. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 49).

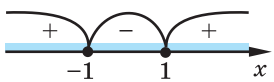


Рис. 49

Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції:

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	-1	↘	-5	↗
		max		min	

Коментар

Використаємо загальну схему дослідження функції (с. 81). При знаходженні області визначення враховуємо, що жодних обмежень, зафіксованих у таблиці 8, функція не має, отже, областю визначення є множина всіх дійсних чисел (можна також використати відоме твердження, що *областю визначення многочлена є всі дійсні числа*).

Щоб знайти точку перетину графіка з віссю Ox, потрібно прирівняти функцію до нуля і розв'язати рівняння $x^3 - 3x - 3 = 0$. Але ми не в змозі знайти корені цього рівняння, тому в розв'язання включено тільки знаходження точки перетину графіка з віссю Oy.

Після знаходження похідної заданої функції, її критичних точок та знаків похідної в кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції, знаходження проміжків зростання і спадання та екстремумів функції зручно виконувати, заповнюючи спеціальну таблицю.

Зауважимо, що функція неперервна на всій числовій прямій, оскільки

6. Знайдемо значення функції в декількох точках:

x	-2	2	3
$f(x)$	-5	-1	15

7. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y = x^3 - 3x - 3$ (рис. 50).

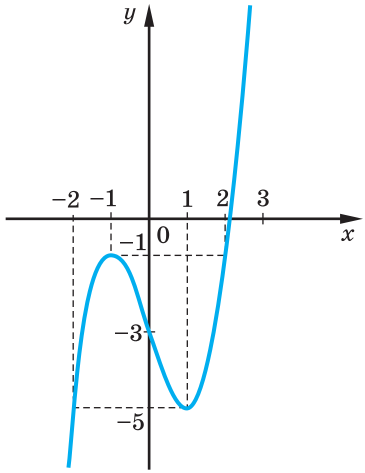


Рис. 50

ки вона диференційовна в кожній точці її області визначення, отже, її графік — нерозривна лінія.

Щоб уточнити вид графіка, доцільно знайти координати декількох додаткових точок.

Після побудови графіка функції можна зробити висновок, що графік має єдину точку перетину з віссю Ox. Ця точка знаходиться між точками $x = 2$ і $x = 3$, оскільки функція $f(x)$ неперервна, на проміжку $[1; +\infty)$ зростає і в точці $x = 2$ набуває від'ємного значення, а в точці $x = 3$ — додатного. Інших точок перетину з віссю Ox бути не може, бо на проміжку $(-\infty; -1]$ функція $f(x)$ зростає від $-\infty$ до -1, а на проміжку $[-1; 1]$ — спадає від -1 до -5, тобто значення функції на цих проміжках від'ємні. ◁

Зауваження. Ми побудували графік функції, не виконуючи дослідження поведінки функції на кінцях проміжків її області визначення. Укажемо, як це можна було зробити. Область визначення заданої функції — проміжок $(-\infty; +\infty)$. Щоб дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення, потрібно з'ясувати, куди буде прямувати функція при $x \to \infty$. Для цього у многочлені достатньо винести за дужки найвищий степінь змінної (це завжди можна зробити, оскільки в тому випадку, коли значення x велике за модулем, то $x \neq 0$). Тоді при $x \neq 0$ маємо $f(x) = x^3 - 3x - 3 = x^3\left(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}\right)$. Оскільки при $x \to \infty$ значення $\frac{3}{x^2} \to 0$ і $\frac{3}{x^3} \to 0$, то $1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} \to 1$. Отже, $f(x)$ буде прямувати до того самого значення, що і x^3. Але при $x \to -\infty$ значення $x^3 \to -\infty$, тоді і $f(x) \to -\infty$, а при $x \to +\infty$ значення $x^3 \to +\infty$, тоді і $f(x) \to +\infty$. Враховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо, що вона набуває всіх значень з проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Відзначимо, що наведені міркування можна повторити для будь-якої функції — многочлена непарного степеня. Тоді, будуючи графіки многочленів непарного степеня, корисно пам'ятати, що *многочлен непарного степеня набуває всіх значень із проміжку* $(-\infty; +\infty)$ і *при великих за модулем значеннях аргументу значення многочлена мало відрізняються від значення його старшого члена*.

Приклад 2 1) Побудуйте графік функції $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$;
2*) Скільки коренів має рівняння $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ у залежності від значення параметра a?

Коментар

Для розв'язування завдання 1 досліджуємо функцію $f(x)$ за загальною схемою і за результатами дослідження будуємо її графік. Для знаходження точки перетину графіка з віссю Ox прирівнюємо функцію до нуля і розв'язуємо одержане біквадратне рівняння. При побудові графіка також враховуємо, що при $x \to \infty$ значення

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9 = x^4\left(1 - \frac{8}{x^2} - \frac{9}{x^4}\right) \to +\infty.$$

Як бачимо, і для многочлена парного степеня *при великих за модулем значеннях аргументу значення многочлена мало відрізняються від значення його старшого члена.*

При розв'язуванні завдання 2 можна користуватися таким орієнтиром: *якщо в завданні з параметрами йдеться про кількість розв'язків рівняння (нерівності або системи), то для аналізу заданої ситуації часто зручно використовувати графічну ілюстрацію розв'язування.*

Особливо простим є відповідне дослідження в тому випадку, коли задане рівняння можна подати у вигляді $f(x) = a$, оскільки графік функції $y = a$ — це пряма, паралельна осі Ox (яка перетинає вісь Oy в точці a), а графік функції $y = f(x)$ легко побудувати, дослідивши функцію $f(x)$ за допомогою похідної. (Відзначимо, що, замінюючи задане рівняння на рівняння $f(x) = a$, потрібно слідкувати за рівносильністю виконаних перетворень, щоб одержане рівняння мало ті самі корені, що й задане, а отже, і кількість коренів у них буде однакова.) Для того щоб визначити, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$, достатньо визначити, скільки точок перетину має графік функції $y = f(x)$ з прямою $y = a$ при різних значеннях параметра a. (Для цього на відповідному рисунку доцільно зобразити всі характерні положення прямої.)

Розв'язання

▶ 1) Дослідимо функцію $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$.

1. Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.
2. Функція парна, оскільки для всіх значень x з її області визначення
$$f(-x) = (-x)^4 - 8(-x)^2 - 9 = x^4 - 8x^2 - 9 = f(x).$$
Отже, графік функції симетричний відносно осі Oy.
3. Точка перетину графіка з віссю Oy: $x = 0$, $y = f(0) = -9$.
Точки перетину графіка з віссю Ox: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. Заміна $x^2 = t$ дає: $t^2 - 8t - 9 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 9$. Тоді $x^2 = -1$ (коренів немає) або $x^2 = 9$. Звідси $x = 3$ та $x = -3$ — абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.

4. Похідна і критичні точки. $f'(x) = 4x^3 - 16x$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція неперервна на всій числовій прямій).
$f'(x) = 0$. Тоді $4x^3 - 16x = 0$, $4x(x^2 - 4) = 0$, $4x(x - 2)(x + 2) = 0$, отже, $x = 0$, $x = 2$ та $x = -2$ — критичні точки.
5. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 51). Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції:

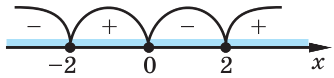


Рис. 51

x	$(-\infty; 2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-25	↗	-9	↘	-25	↗
		min		max		min	

6. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік* функції $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (рис. 52). ◁

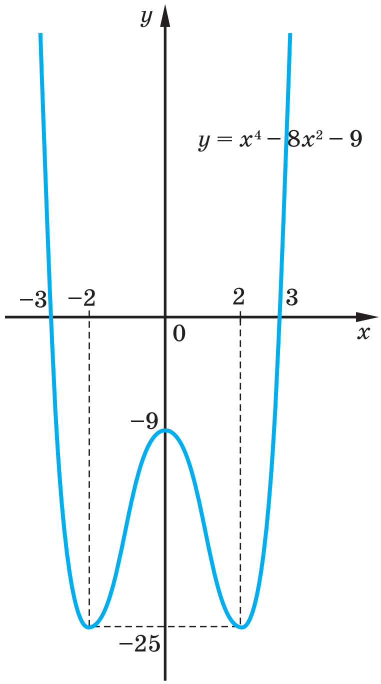


Рис. 52

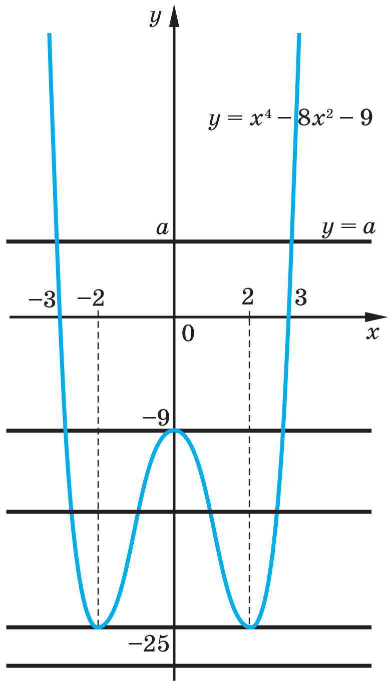


Рис. 53

*Масштаб по осях Ox і Oy різний.

2) Відзначимо, що задане рівняння $x^4 - 8x^2 - 9 - a = 0$ рівносильне рівнянню $x^4 - 8x^2 - 9 = a$. Розв'яжемо останнє рівняння графічно. Для цього побудуємо графік функції $y = x^4 - 8x^2 - 9$ (див. завдання 1) та графік функції $y = a$ (рис. 53).
Як бачимо, при $a < -25$ рівняння не має коренів (немає точок перетину графіків); при $a = -25$ та при $a > -9$ рівняння має два корені (графіки мають дві спільні точки); при $a = -9$ рівняння має три корені (графіки мають три спільні точки) і при $-25 < a < -9$ рівняння має чотири корені (графіки мають чотири спільні точки). ◁

Приклад 3 1) Побудуйте графік функції $y = \frac{\ln x}{x}$;

2*) Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = a\,x$ має єдиний корінь.

Коментар

Для розв'язування завдання 1 досліджуємо функцію $y = \frac{\ln x}{x}$ за загальною схемою і за результатами дослідження будуємо її графік. При дослідженні функції на парність і непарність можна скористатися тим, що *у парної або непарної функції* до області визначення входять точки x і $(-x)$. Отже, для таких функцій *область визначення повинна бути симетричною відносно точки* 0. Якщо ж ця умова не виконується, то функція не може бути ні парною, ні непарною.

Для кращого уявлення про вид графіка доцільно уточнити поведінку функції на кінцях області визначення ($D(y) = (0; +\infty)$). При $x \to 0$ (справа, тобто при $x \to +0$) значення $\ln x \to -\infty$. Тоді $y = \frac{\ln x}{x} \to \left(\frac{-\infty}{+0}\right) \to -\infty$ (рис. 55). Але при $x \to +\infty$ ми не можемо виконати таку оцінку $\left(\text{одержуємо невизначеність виду } \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\right)$. У такому випадку поведінку функції при $x \to +\infty$ можна уточнити за допомогою додаткових контрольних точок.

При розв'язуванні завдання 2 доцільно використати графічну ілюстрацію розв'язування. Це можна зробити двома способами:

I. За допомогою рівносильних перетворень привести задане рівняння до виду $f(x) = a$ $\left(\text{де } f(x) = \frac{\ln x}{x}\right)$ і, використовуючи графік, побудований у завданні 1, з'ясувати, скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ при різних значеннях параметра a.

II. Застосувати графічне розв'язування безпосередньо до рівняння $\ln x = ax$ (графіки функцій $y = \ln x$ і $y = ax$ нам відомі), а для дослідження єдиності кореня використати геометричний зміст похідної.

Розв'язання

1) Дослідимо функцію $y=\frac{\ln x}{x}$.

1. Область визначення: $x > 0$, тобто $D(y) = (0; +\infty)$.
2. Функція ні парна, ні непарна, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.
3. Точки перетину графіка з осями координат. Графік не перетинає вісь $0y$ $(x \neq 0)$.

   На осі Ox $y = 0$, тобто $\frac{\ln x}{x}=0$. Тоді при $x > 0$ одержуємо: $\ln x = 0$; $x = 1$ — абсциса точки перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки.

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}.$$

   Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$ (тобто при $x > 0$), отже, функція неперервна на всій області визначення.

   $y' = 0$. Тоді $\frac{1-\ln x}{x^2}=0$. Звідси при $x > 0$ одержуємо $\ln x = 1$, отже, $x = e$ — критична точка.
5. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції і знаходимо знак $y'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 54).

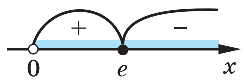


Рис. 54

   Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції.

x	$(0; e)$	e	$(e; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$
		max	

6. Знайдемо ще декілька точок графіка функції:

x	$\frac{1}{e} \approx 0{,}4$	$e^3 \approx 7{,}4$	$e^3 \approx 20{,}1$
$y(x)$	$-e \approx -2{,}7$	$\frac{2}{e^2} \approx 0{,}3$	$\frac{3}{e^3} \approx 0{,}1$

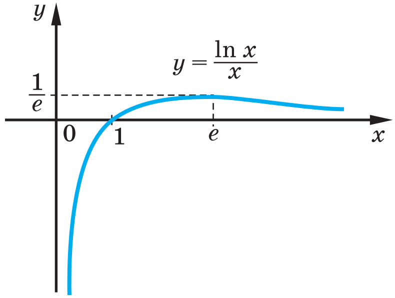


Рис. 55

7. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис. 55).

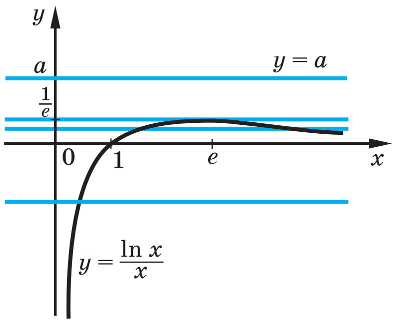


Рис. 56

<u>I спосіб розв'язування завдання 2</u>

▶ 2) Область допустимих значень даного рівняння $\ln x = ax$ задається нерівністю $x > 0$. Але тоді $x \neq 0$ і задане рівняння на його ОДЗ рівносильне рівнянню $\frac{\ln x}{x} = a$.

Розв'яжемо останнє рівняння графічно. Для цього побудуємо графік функції $y = \frac{\ln x}{x}$ (див. завдання 1) та графік функції $y = a$ (рис. 56).

Як бачимо, рівняння $\frac{\ln x}{x} = a$ має єдиний корінь тільки при $a \leqslant 0$ та при $a = \frac{1}{e}$ (при $0 < a < \frac{1}{e}$ рівняння має два корені, а при $a > \frac{1}{e}$ рівняння не має коренів).

Отже, найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = ax$ має єдиний корінь, — це $a = \frac{1}{e}$. ◁

<u>II спосіб розв'язування завдання 2</u>

Розв'язання

▶ Розглянемо графічну ілюстрацію (рис. 57) розв'язування заданого рівняння

$$\ln x = ax. \qquad (1)$$

Функція $y = \ln x$ зростаюча і набуває всіх значень від $-\infty$ до $+\infty$.

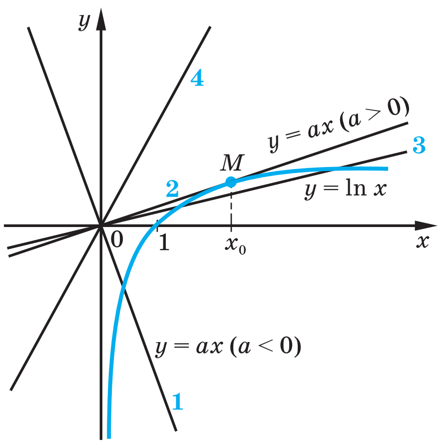


Рис. 57

Графіком функції $y = ax$ є пряма, яка проходить через початок координат.

При $a < 0$ пряма $y = ax$ перетинає графік функції $y = \ln x$ тільки в одній точці (пряма 1 на рисунку 57). Отже, рівняння (1) має єдиний корінь (дійсно, функція $y = \ln x$ зростаюча, а функція $y = ax$ — спадна, і тому рівняння (1) може мати тільки єдиний корінь).

При $a = 0$ рівняння (1) має вигляд $\ln x = 0$ і теж має єдиний корінь ($x = 1$).

При $a > 0$ пряма $y = ax$ може дотикатися до графіка функції $y = \ln x$ (пряма 2 на рисунку 57). Тоді рівняння (1) теж буде мати єдиний корінь. Також пряма $y = a\,x$ може проходити в першій чверті нижче дотичної (пряма 3 на рисунку 57). Тоді рівняння (1) буде мати два корені. Також пряма $y = ax$ може проходити в першій чверті вище дотичної (пряма 4 на рисунку 57): тоді рівняння (1) не буде мати коренів.

З'ясуємо, коли пряма $y = ax$ буде дотичною до графіка функції $y = f(x) = \ln x$. Нехай точка дотику M має абсцису x_0. Враховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо, що $f'(x_0) = a$ (значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної, проведеної через точку M). Оскільки $f'(x) = \frac{1}{x}$, то $f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$. Тоді з рівності $f'(x_0) = a$ маємо $\frac{1}{x_0} = a$. Звідси $x_0 = \frac{1}{a}$. Тоді $y_0 = \ln\frac{1}{a}$. З іншого боку, оскільки точка дотику M лежить і на дотичній $y = ax$, то її координати задовольняють і рівнянню дотичної. Одержуємо $\ln\frac{1}{a} = a\cdot\frac{1}{a}$, тобто $\ln\frac{1}{a} = 1$. Тоді $\frac{1}{a} = e$, отже, $a = \frac{1}{e}$.

Таким чином, задане рівняння буде мати єдиний корінь тільки при $a < 0$ та при $a = \frac{1}{e}$. Тоді найбільше значення параметра a, при якому рівняння $\ln x = a\,x$ має єдиний корінь, — це $a = \frac{1}{e}$. ◁

Приклад 4* Побудуйте графік функції $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Розв'язання

▶ 1. Область визначення: $D(y) = \mathbf{R}$.

2. Функція не є ні парною ні непарною, оскільки
$$y(-x) = \sqrt[3]{(-x-1)^2} = \sqrt[3]{(x+1)^2} \neq y(x)$$
$$(\text{і } y(-x) \neq -y(x)).$$

3. Точка перетину графіка з віссю Oy:
$$x = 0,\ y = y(0) = 1.$$
Точка перетину графіка з віссю Ox: $y = 0$, тоді $\sqrt[3]{(x-1)^2} = 1$, тобто
$$x = 1.$$

4. Похідна і критичні точки.
$$y' = \left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{((x-1)^2)^2}}((x-1)^2)' =$$
$$= \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4}} = \frac{2(x-1)}{3(x-1)\sqrt[3]{x-1}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}.$$

Похідна не існує у внутрішній точці $x = 1$ області визначення

Коментар

Використаємо загальну схему дослідження функції (с. 81). При знаходженні області визначення враховуємо, що жодних обмежень, зафіксованих у таблиці 8, функція не має, отже, областю визначення будуть усі дійсні числа.

Для знаходження похідної заданої функції використаємо формулу $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ і формулу знаходження похідної складеної функції.

(Зауважимо, що $\sqrt[3]{(x-1)^2} \neq (x-1)^{\frac{2}{3}}$, оскільки при $x < 1$ вираз $(x-1)^{\frac{2}{3}}$ не означений. У цьому випадку можна було записати, що $\sqrt[3]{(x-1)^2} = |x-1|^{\frac{2}{3}}$ або врахувати, що $(x-1)^2 \geqslant 0$, і запифункції $y(x)$, отже, $x = 1$ — критична точка. Інших критичних точок немає, оскільки $y' \neq 0$.

5. Відмічаємо критичну точку на області визначення функції $y(x)$ і знаходимо знак $y'(x)$ у кожному з одержаних проміжків (рис. 58).

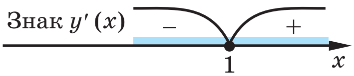


Рис. 58

6. Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції:

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	–	не існує	+
$y(x)$	↘	0	↗
		min	

7. Знаходимо значення функції в декількох точках:

x	-7	2	9
y	4	1	4

8. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції (рис. 59).

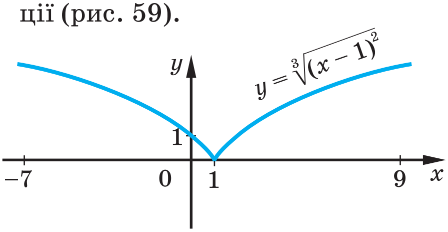


Рис. 59

сати $\sqrt[3]{(x-1)^2} = ((x-1)^2)^{\frac{1}{3}}$, а потім знайти похідну степеня відповідної складеної функції).

Зауважимо, що функція неперервна на всій числовій прямій (область визначення — всі дійсні числа і задана функція є композицією, тобто результатом послідовного застосування двох неперервних функцій: $y = \sqrt[3]{u}$ і $u = (x-1)^2$), отже, її графік — нерозривна лінія.

Після дослідження поведінки похідної функції при переході через критичну точку, користуючись результатами, наведеними в таблиці 9, робимо висновок, що в околі точки $x = 1$ графік має такий вигляд: . Оскільки похідна не існує в точці $x = 1$, то в околі цієї точки графік має злом, а в самій точці $x = 1$ графік має вертикальну дотичну.

Щоб уточнити вид графіка, доцільно знайти координати декількох додаткових точок. Для усного обчислення ординат цих точок зручно вибирати такі значення x, при яких значення $x - 1$ буде кубом цілого або раціонального числа.

Запитання для контролю

1. За якою схемою можна досліджувати властивості функції для побудови її графіка?

2*. Охарактеризуйте особливості виконання основних етапів дослідження функції та відображення результатів дослідження на графіку функції. Наведіть приклади.

Вправи

1°. Побудуйте схематичний графік функції, визначеної і неперервної на множині всіх дійсних чисел, користуючись її властивостями, указаними в таблиці.

1)

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 0)$	0	$(0; +\infty)$
$y'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\nearrow$	5	$\searrow$	2	$\nearrow$
		max		min	

2)

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$y'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$y(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$
		min		max		min	

Дослідіть функцію і побудуйте її графік **(2 – 3)**.

2°. 1) $f(x) = x^3 - 3x^2$; 2) $f(x) = 3x - x^3 + 1$;
3) $f(x) = x^4 - 2x^2$; 4) $f(x) = 5x^4 - 4x^5$.

3. 1) $f(x) = (x^2 - 2)^2$; 2) $f(x) = x + \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \frac{4}{x} - x$; 4) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

4. а) Дослідіть функцію $f(x)$ і побудуйте її графік.
б) Знайдіть область значень функції $f(x)$.
в*) Скільки коренів має рівняння $f(x) = a$ у залежності від значення параметра a?

1) $f(x) = x + \frac{4}{x}$; 2) $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$; 3) $f(x) = \sqrt{x}\ln x$; 4) $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

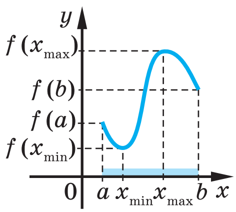
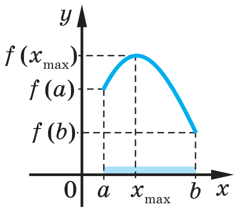
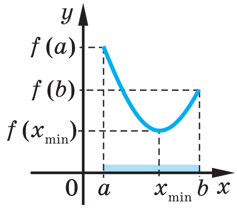
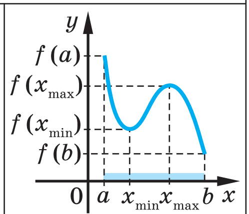
5. Скільки коренів має рівняння:
1) $x^4 - 4x^3 + 1 = 0$; 2) $8x^3 - 3x^4 + 2 = 0$;
3) $x^2 - \frac{1}{3}x^3 - 3 = 0$; 4) $x^3 - 3x^2 - 9x - 7 = 0$?

6*. Дослідіть функцію і побудуйте її графік:
1) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; 2) $y = 2x - 5\sqrt[5]{x^2}$;
3) $y = 2\sin x - \cos 2x$; 4) $y = \cos^2 x - \cos x$.

7*. Знайдіть всі значення параметра a, при яких рівняння $ax^6 = e^x$ має єдиний додатний корінь.

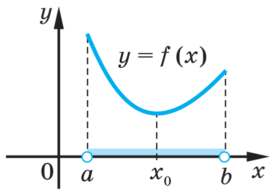
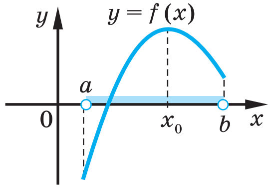
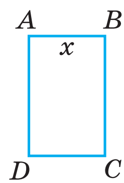
6.3. Найбільше і найменше значення функції

Таблиця 10

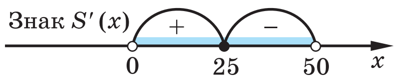
1. Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку			
Властивість			
Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.			
Приклади			
			
$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(x_{\max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\min})$	$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(x_{\max})$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$	$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(x_{\min})$	$\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=f(a)$ $\min\limits_{[a;b]} f(x)=f(b)$

2. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку	
Схема	Приклад Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = x^3 - 12x + 12$ на відрізку $[1; 3]$.
1. Впевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.	Область визначення заданої функції — всі дійсні числа ($D(f) = \boldsymbol{R}$), отже, заданий відрізок входить до області визначення функції $f(x)$.
2. Знайти похідну $f'(x)$.	$f'(x) = 3x^2 - 12$.
3. Знайти критичні точки: $f'(x) = 0$ або не існує.	$f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому відрізку). $f'(x) = 0$; $3x^2 - 12 = 0$ при $x = 2$ або $x = -2$.
4. Вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку.	Заданому відрізку $[1; 3]$ належить лише критична точка $x = 2$.

Продовж. табл. 10

5. Обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка.	$f(1)=1$; $f(2)=-4$; $f(3)=3$.
6. Порівняти одержані значення функції і вибрати з них найменше і найбільше.	$\max\limits_{[1;\,3]} f(x)=f(3)=3$, $\min\limits_{[1;\,3]} f(x)=f(2)=-4$.
3. Знаходження найбільшого чи найменшого значення функції, неперервної на інтервалі	
Властивість	Ілюстрація
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0.	
Якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка максимуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці x_0.	
4. Задачі на знаходження найбільшого та найменшого значень функції	
Схема	Приклад **Є дріт довжиною 100 м. Потрібно огородити ним прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайдіть розміри ділянки.**
1. Одну з величин, яку потрібно знайти (або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на питання задачі), позначити через x (і за змістом задачі накласти обмеження на x).	Нехай ділянка має форму прямокутника $ABCD$ (див. рисунок) із стороною $AB = x$ (м). Враховуючи, що дріт буде натягнуто по периметру прямокутника, одержуємо: $2AB + 2BC = 100$. Тобто $2x + 2BC = 100$, звідси $BC = 50 - x$ (м). Оскільки довжина кожної сторони прямокутника — додатне число, то $0 < x < 50$.

Продовж. табл. 10

2. Ту величину, про яку говориться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від x.	Площа прямокутника: $S(x) = AB \cdot BC = x(50 - x) = 50x - x^2$.
3. Дослідити одержану функцію на найбільше чи найменше значення (найчастіше за допомогою похідної).	Дослідимо функцію $S(x)$ за допомогою похідної. Похідна $S'(x) = 50 - 2x$ існує при всіх дійсних значеннях x (отже, $S(x)$ — неперервна функція на заданому проміжку). $S'(x) = 0$, $50 - 2x = 0$, $x = 25$ — критична точка.  У точці $x = 25$ $S'(x) = 50 - 2x$ змінює знак з плюса на мінус (див. рисунок), отже, $x = 25$ — точка максимуму. Враховуючи, що неперервна функція $S(x)$ має на заданому інтервалі (0; 50) тільки одну точку екстремуму $x = 25$ і це точка максимуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найбільшого значення в точці $x = 25$*.
4. Впевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі.	Отже, площа огородженої ділянки буде найбільшою, якщо сторони прямокутника будуть: $AB = x = 25$ (м), $BC = 50 - x = 25$ (м), тобто коли ділянка буде мати форму квадрата із стороною 25 м.

Пояснення й обґрунтування

Найбільше і найменше значення функції, неперервної на відрізку. Людині в житті часто доводиться шукати найкращий, або, як часто кажуть, оптимальний розв'язок поставленої задачі. Частину таких задач вдається роз-

* У розглянутій задачі можна було дослідити функцію $S(x)$ і без застосування похідної. Функція $S(x) = 50x - x^2$ є квадратичною функцією, графіком якої є парабола, вітки якої напрямлені вниз. Тоді найбільшого значення ця функція набуває у вершині параболи, тобто при $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25.$ Це значення знаходиться в заданому інтервалі (0;50), отже, на цьому інтервалі функція теж набуває найбільшого значення при $x = 25$.

в'язати за допомогою методів математичного аналізу — це задачі, які можна звести до знаходження найбільшого або найменшого значення функції.

У курсах аналізу доводиться теорема Вейєрштрасса: *неперервна на відрізку* $[a; b]$ *функція* $f(x)$ *має на цьому відрізку найбільше і найменше значення*, тобто існують точки відрізка $[a; b]$, у яких $f(x)$ набуває найбільшого та найменшого на $[a; b]$ значення.

Розглянемо випадок, коли неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку лише скінченне число критичних точок. Тоді має місце властивість:

якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває свого найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Геометрична ілюстрація цієї властивості наведена в пункті 1 таблиці 10.

1) Спочатку розглянемо випадок, коли неперервна на відрізку $[a; b]$ функція $f(x)$ не має на цьому відрізку критичних точок. Тоді на відрізку $[a; b]$ похідна $f'(x)$ зберігає постійний знак (див. с. 61), отже, функція $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ зростає (рис. 60, *а*) або спадає (рис. 60, *б*). Тому найбільше і найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ — це значення на кінцях a і b.

2) Нехай тепер функція $f(x)$ має на відрізку $[a; b]$ скінченне число критичних точок. Ці точки розбивають відрізок $[a; b]$ на скінченне число відрізків, всередині яких критичних точок немає. Тоді, згідно з пунктом 1, найбільшого і найменшого значень функція $f(x)$ набуває на кінцях таких відрізків, тобто в критичних точках функції, або в точках a і b.

Таким чином, *щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної на відрізку функції, яка має на цьому відрізку скінченне число критичних точок, достатньо обчислити значення функції в усіх критичних точках і на кінцях відрізка і з одержаних чисел вибрати найбільше і найменше.*

Зауважимо, що для використання цього орієнтиру потрібно впевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення даної функції і що функція неперервна на цьому відрізку (останнє випливає, наприклад, з того, що функція диференційовна на заданому відрізку). А для знаходження критичних точок функції, звичайно, потрібно знайти її похідну і з'ясувати, де похідна дорівнює нулю або не існує. Уточнена схема знаходження найбільшого та найменшого значень функції, неперервної на відрізку, наведена в таблиці 10 (п. 2, с. 98). Там

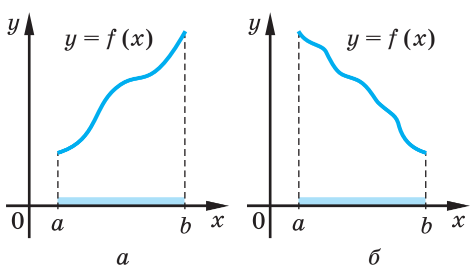


Рис. 60

же наведено і приклад використання цієї схеми. Інші приклади знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку, наведено далі у прикладах на с. 103–107 .

Твердження про те, що найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ досягається в точці x_0, можна позначати так: $\max\limits_{[a;\ b]} f(x) = f(x_0)$; аналогічно твердження про те, що найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ досягається в точці x_0, можна позначати так: $\min\limits_{[a;\ b]} f(x) = f(x_0)$.

При розв'язуванні деяких задач доводиться знаходити ***найбільше*** і ***найменше значення неперервної функції*** не на відрізку, а ***на інтервалі***. Найчастіше в таких задачах функція має на заданому інтервалі тільки одну критичну точку: або точку максимуму, або точку мінімуму. У цих випадках у точці максимуму функція $f(x)$ набуває найбільшого значення на даному інтервалі (рис. 61), а в точці мінімуму — найменшого значення на даному інтервалі (рис. 62) (див. повне формулювання відповідних властивостей у пункті 3 таблиці 10 на с. 99).

Дійсно, якщо, наприклад, неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі $(a;\ b)$ тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то в цій точці похідна $f'(x)$ змінює знак з мінуса на плюс.

Тобто якщо $x < x_0$, то $f'(x) < 0$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона спадає при $x \leqslant x_0$, і тоді при $x < x_0$ маємо $f(x) > f(x_0)$.

Також якщо $x > x_0$, то $f'(x) > 0$. Оскільки функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то вона зростає при $x \geqslant x_0$, і тоді при $x > x_0$ маємо $f(x) > f(x_0)$. Це й означає, що значення $f(x_0)$ — найменше значення функції на інтервалі $(a;\ b)$.

Аналогічно обґрунтовується і випадок, коли x_0 — точка максимуму (проведіть обґрунтування самостійно).

Розглянуті способи знаходження найбільших і найменших значень функції використовуються для ***розв'язування*** різноманітних ***прикладних задач***.

Розв'язування практичних задач методами математики, як правило, містить три основних етапи: 1) формалізація, тобто створення математич-

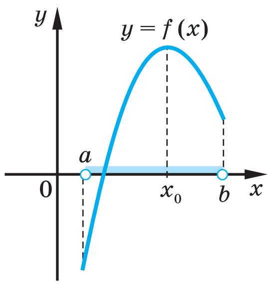


Рис. 61

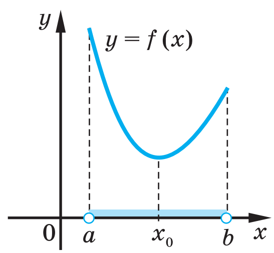


Рис. 62

ної моделі задачі (переклад умови задачі на мову математики); 2) розв'язування складеної математичної задачі; 3) інтерпретація знайденого розв'язку (аналіз одержаного результату, тобто переклад його з мови математики в терміни початкової задачі)*.

Для задач на знаходження найбільшого та найменшого значень реалізацію цих етапів можна проводити за схемою: 1) *одну з величин, яку потрібно знайти* (*або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на питання задачі*), *позначити через* x (і за змістом задачі накласти обмеження на x); 2) *ту величину, про яку говориться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від* x; 3) *дослідити одержану функцію на найбільше чи найменше значення*; 4) *впевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі*.

Приклади використання цієї схеми наведено в пункті 4 таблиці 10 (с. 99) та у прикладах на с. 104–107.

При розв'язуванні деяких задач на знаходження найбільшого та найменшого значень функції доцільно використовувати таке твердження:

якщо значення функції $f(x)$ невід'ємні на деякому проміжку, то ця функція і функція $(f(x))^n$, де n — натуральне число, набувають найбільшого (найменшого) значення в одній і тій самій точці.

Дійсно, при $u \geqslant 0$ функція $y = u^n$, де n — натуральне число, є зростаючою функцією ($y' = nu^{n-1} \geqslant 0$ при $u \geqslant 0$ і $y' = 0$ тільки при $u = 0$**). Тоді складена функція $y = (f(x))^n$ (тобто функція $y = u^n$, де $u = f(x)$) буде зростати там, де зростає функція $f(x)$, і спадати там, де спадає функція $f(x)$, а отже, і набувати найбільшого (чи найменшого) значення в тій самій точці, що і функція $f(x)$.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ на відрізку $[0; \pi]$.

Розв'язання

1) $D(f) = \boldsymbol{R}$, отже, відрізок $[0; \pi]$ входить до області визначення функції $f(x)$.

2) $f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$.

3) $f'(x)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$ (отже, функ-

Коментар

Використаємо схему знаходження найбільшого і найменшого значень неперервної на відрізку функції $f(x)$:

1) *впевнитися, що заданий відрізок входить до області визначення*

* Із цим загальним методом розв'язування практичних задач методами математики (його називають *методом математичного моделювання*) ви вже фактично знайомилися. За описаною схемою ви розв'язували текстові задачі в курсі алгебри.

** Звичайно, при $n \geqslant 2$, а при $n = 1$ значення $y' = (u)' = 1 > 0$.

ція $f(x)$ є неперервною на заданому відрізку);
$f'(x) = 0$, $2\cos x - 2\sin 2x = 0$,
$\cos x - 2\sin x \cos x = 0$,
$\cos x(1 - 2\sin x) = 0$, $\cos x = 0$
або $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$,
або $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, — критичні точки.

4) У заданий відрізок попадають тільки критичні точки: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$.

5) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi = 1$,

$f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{5\pi}{3} = 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$,

$f(0) = 1$, $f(\pi) = 1$.

6) $\min\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f(0) = f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

$\max\limits_{[0;\,\pi]} f(x) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. ◁

функції; 2) *знайти похідну*; 3) *знайти критичні точки* ($f'(x) = 0$ або не існує); 4) *вибрати критичні точки, які належать заданому відрізку*; 5) *обчислити значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка*; 6) *порівняти одержані значення і вибрати з них найбільше і найменше.*

Щоб впевнитися в неперервності заданої функції, достатньо після знаходження її похідної з'ясувати, що похідна існує в кожній точці області визначення функції (або можна відзначити, що задана функція неперервна як сума двох неперервних функцій $\sin x$ і $\cos 2x$).

З'ясовувати, які критичні точки належать заданому відрізку, можна на відповідному рисунку, відмічаючи критичні точки на числовій прямій (рис. 63):

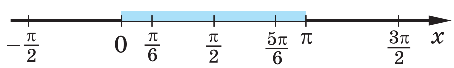


Рис. 63

Приклад 2 З круглої колоди вирізають брус з прямокутним перерізом найбільшої площі. Знайдіть розміри перерізу брусу, якщо радіус перерізу колоди дорівнює 25 см.

Розв'язання

▶ 1) Нехай з круга вирізають прямокутник $ABCD$ (рис. 64) із стороною $AB = x$ (см). Враховуючи, що AC — діаметр круга, маємо $AC = 50$ (см). Оскільки x — довжина відрізка, то $x > 0$. Крім того, $AB < AC$ (катет прямокутного три-

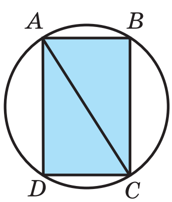


Рис. 64

Коментар

Використаємо загальну схему розв'язування задач на найбільше та найменше значення: 1) *одну з величин, яку потрібно знайти (або за допомогою якої можна дати відповідь на питання задачі) позначити через x* (і за змістом задачі накласти обмеження на x); 2) *ту величину, про яку говориться, що вона найбільша або найменша, виразити як функ-*

кутника ABC менший за його гіпотенузу), отже, $0 < x < 50$.

2) З прямокутного трикутника ABC $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{2500 - x^2}$ (см).

Тоді площа перерізу $ABCD$ дорівнює: $S(x) = AB \cdot BC = x\sqrt{2500 - x^2}$.

Оскільки при $0 < x < 50$ значення $S(x) > 0$, то розглянемо функцію $f(x) = (S(x))^2 = x^2(2500 - x^2) = 2500x^2 - x^4$, яка набуває найбільшого значення на проміжку $0 < x < 50$ у тій самій точці, що і $S(x)$.

3) Похідна $f'(x) = 5000x - 4x^3$ існує у всіх точках заданого проміжку (отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому проміжку).

$f'(x) = 0$, $5000x - 4x^3 = 0$,

$4x(1250 - x^2) = 0$, $x = 0$ або $x = \pm 25\sqrt{2}$.

У проміжок (0; 50) попадає тільки одна критична точка $x = 25\sqrt{2}$, яка є точкою максимуму: у цій точці похідна змінює знак з плюса на мінус (рис. 65).

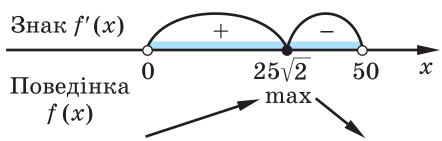


Рис. 65

Оскільки функція $f(x)$ неперервна на заданому інтервалі і має там тільки одну точку екстремуму і це точка максимуму, то на цьому інтервалі функція набуває найбільшого значення в точці $x = 25\sqrt{2}$.

4) Тоді $AB = x = 25\sqrt{2}$,

$BC = \sqrt{2500 - x^2} = 25\sqrt{2}$. Отже, найбільша площа перерізу бруса буде в тому випадку, коли шуканий прямокутник ... цію від x; 3) *дослідити одержану функцію на найбільше чи найменше значення*; 4) *впевнитися, що одержаний результат має зміст для початкової задачі*.

Одержану функцію $S(x) = x\sqrt{2500 - x^2}$ на проміжку $0 < x < 50$ можна досліджувати безпосередньо. Але краще врахувати, що на цьому проміжку $S(x) > 0$, і досліджувати функцію $f(x) = (S(x))^2$, запис якої не містить знаку кореня і яка набуває найбільшого значення в тій самій точці, що і $S(x)$.

Висновок про те, що в знайденій точці функція $f(x)$ набуває найбільшого значення, можна обґрунтувати одним з трьох способів: 1) використати властивість неперервної на інтервалі функції, що має на цьому інтервалі тільки одну точку екстремуму (п. 3 табл. 10 — саме так зроблено в розв'язанні); 2) спираючись на поведінку неперервної функції $f(x)$ (досліджену за допомогою похідної — див. рис. 65), обґрунтувати, що на проміжку $(0; x_0)$ (де $x_0 = 25\sqrt{2}$) $f(x) < f(x_0)$, і на проміжку $(x_0; 50)$ $f(x) < f(x_0)$, отже, у точці x_0 функція $f(x)$ набуває найбільшого значення; 3) для знаходження найбільшого значення функції $f(x)$ на інтервалі (0; 50) можна використати те, що функція $f(x)$ неперервна на всій числовій прямій, тому можна знайти її найбільше значення на відрізку [0; 50], а потім зробити висновок для даної задачі:

$f(0) = f(50) = 0$, $f(25\sqrt{2}) = 1250$.

Отже, найбільшого значення на відрізку [0; 50] функція $f(x)$ набумокутник буде квадратом із стороною $25\sqrt{2}$ (≈ 35 см). ◁

ває в точці x_0 (яка лежить всередині цього відрізка). Тоді і на інтервалі (0; 50) ця функція набуває найбільшого значення в точці x_0.

Приклад 3* Точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, точка B — на осі Ox, і її абсциса в чотири рази більша за ординату точки A. Знайдіть найбільше значення площі трикутника OAB, де точка O — початок координат, а

$$f(x) = \sqrt{7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x} \text{ і } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}.$$

Коментар

Для функції $f(x)$ непросто знайти область визначення, але можна впевнитися, що заданий проміжок повністю входить до області визначення цієї функції, оцінивши значення підкореневого виразу на заданому проміжку. Для цього враховуємо, що на одиничному колі заданий проміжок знаходиться в другій і третій чвертях (рис. 66), де $\cos x < 0$ і $7 + 3\sin x > 0$ при всіх значеннях x.

Також слід врахувати, що за означенням графіка функції точка A має координати $(x; y) = (x; f(x))$. Щоб стверджувати, що висота трикутника OAB дорівнює ординаті точки A (рис. 67), потрібно обґрунтувати, що на заданому проміжку графік функції $y = f(x)$ лежить у першій чверті.

Після запису площі трикутника OAB як функції $S(x)$ для знаходження її найбільшого значення звертаємо увагу на те, що достатньо складно знайти $S\left(\frac{9\pi}{8}\right)$. Тому зручно виконати дослідження цієї функції за допомогою похідної і обґрунтувати, що в точці екстремуму із заданого проміжку функція набуває найбільшого значення на заданому проміжку (а не користуватися схемою знаходження найбільшого значення неперервної функції на відрізку).

Розв'язання

▶ При $\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ $3x + 1 > 0$ і $\cos x < 0$. Тоді $-(3x+1)\cos x > 0$ на заданому проміжку. При всіх значеннях x маємо $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$. Тоді $-3 \leqslant 3\sin x \leqslant 3$,

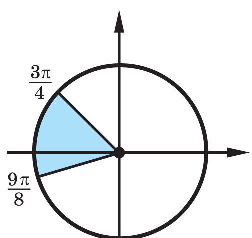


Рис. 66

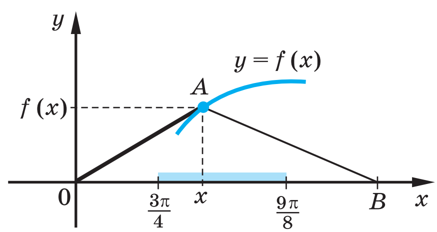


Рис. 67

отже, $7 + 3\sin x > 0$. Таким чином, на заданому проміжку

$$7 + 3\sin x - (3x + 1)\cos x > 0,$$

отже, заданий проміжок повністю входить до області визначення функції $f(x)$. Також відзначимо, що в цьому випадку значення функції $f(x)$ будуть додатні, тобто на заданому проміжку графік функції $y = f(x)$ лежить у першій чверті.

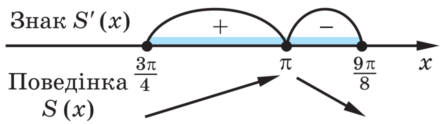


Рис. 68

Оскільки задана точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, то у випадку, коли абсциса точки A дорівнює x, ордината точки A дорівнює $f(x)$ (див. рис. 67). За умовою $x_B = 4y_A = 4f(x)$. Точка A лежить у першій чверті, отже, $y_A > 0$, а значить, і $x_B > 0$. Тоді $OB = x_B = 4f(x)$, а висота трикутника OAB дорівнює ординаті точки A: $h = y_A = f(x)$. Тоді площа трикутника OAB дорівнює:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 4f(x) \cdot f(x) = 2f^2(x) = 2(7 + 3\sin x - (3x+1)\cos x).$$

Отже, нам потрібно знайти найбільше значення функції

$$S(x) = 14 + 6\sin x - (6x + 2)\cos x \text{ при } \frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{8}.$$

Тоді $S'(x) = 6\cos x - (6\cos x - (6x + 2)\sin x) = (6x + 2)\sin x$.

Похідна $S'(x)$ існує у всіх точках заданого відрізка. Отже, функція $S(x)$ — неперервна на цьому відрізку. Знайдемо, де $S'(x) = 0$:

$$(6x + 2)\sin x = 0; \ x = -\frac{1}{3} \text{ або } x = \pi k, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Із знайдених точок у заданий відрізок входить тільки критична точка $x = \pi$.

Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення (рис. 68).

Враховуючи неперервність функції $S(x)$ на заданому проміжку, одержуємо, що ця функція зростає на проміжку $\left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$ (тоді при $\frac{3\pi}{4} \leqslant x < \pi$ значення $S(x) < S(\pi)$) і спадає на проміжку $\left[\pi; \frac{9\pi}{8}\right]$ (тоді при $\pi < x \leqslant \frac{9\pi}{8}$ значення $S(x) < S(\pi)$). Отже, на відрізку $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{9\pi}{8}\right]$ функція $S(x)$ набуває найбільшого значення при $x = \pi$. Тоді $S(\pi) = 14 + 6\sin\pi - (6\pi + 2)\cos\pi = 16 + 6\pi$ (квадратних одиниць).

Відповідь. Найбільше значення площі трикутника дорівнює $16 + 6\pi$ кв. од. ◁

Запитання для контролю

1. а) Поясніть, у яких точках неперервна на відрізку функція може набувати свого найбільшого та найменшого значення на цьому відрізку. Проілюструйте відповідну властивість на графіках функцій.

б*) Обґрунтуйте відповідну властивість для випадку, коли неперервна на відрізку функція має на цьому відрізку лише скінченне число критичних точок.

2. Опишіть схему знаходження найбільшого і найменшого значень функції, неперервної на відрізку. Наведіть приклад.
3. а) Сформулюйте властивості неперервної на інтервалі функції, яка має на цьому інтервалі тільки одну точку екстремуму.
   б*) Обґрунтуйте відповідні властивості.
4. Опишіть схему розв'язування задач на найбільше та найменше значення за допомогою дослідження відповідних функцій. Наведіть приклад.

Вправи

Знайдіть найбільше і найменше значення функції на заданому відрізку **(1–4)**.

1°. 1) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$, $[0; 3]$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$, $[-1; 2]$;
3) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 1$, $[-1; 1]$; 4) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$, $[-2; 1]$.

2. 1) $f(x) = 3\cos x + \cos 3x$, $[0; \pi]$; 2) $f(x) = 5\sin x + \cos 2x$, $[0; \pi]$;
3) $f(x) = \operatorname{tg} x - x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$; 4) $f(x) = \operatorname{ctg} x + x$, $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$.

3. 1) $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$, $[1; 6]$; 2) $f(x) = 2\sqrt{x} - x$, $[0; 9]$;
3) $f(x) = x + e^{-x}$, $[-1; 2]$; 4) $f(x) = \ln(2x) - 6x^2 + 11x$, $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

4*. 1) $f(x) = -x^3 + 3x\,|x - 3|$, $[0; 4]$; 2) $f(x) = x^3 - 2x\,|x - 2|$, $[0; 3]$;
3) $f(x) = |x^2 - x - 2| + \ln x$, $[1; 3]$; 4) $f(x) = |x^2 - x - 6| - x^3$, $[-4; 4]$.

5°. Число 10 подайте у вигляді суми двох невід'ємних доданків так, щоб сума квадратів цих чисел була найменшою.

6°. Число 4 розбийте на два доданки так, щоб сума першого доданка з квадратом другого була б найменшою.

7. Різниця двох чисел дорівнює 8. Які мають бути ці числа, щоб добуток куба першого числа на друге був найменшим?

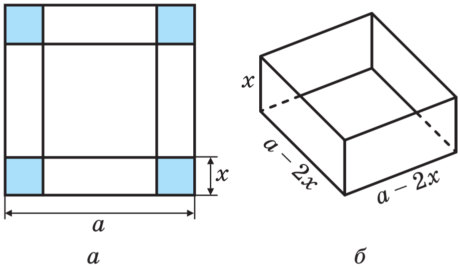


Рис. 69

8. З усіх прямокутників, площа яких дорівнює 25 см², знайдіть прямокутник з найменшим периметром.

9. З квадратного листа картону із стороною *a* треба виготовити відкриту зверху коробку, вирізавши по кутах квадратики (рис. 69) і загнувши утворені краї. Якою повинна бути висота коробки, щоб її об'єм був найбільшим?

10. Доведіть, що з усіх рівнобедрених трикутників, вписаних у коло радіуса R, найбільшу площу має рівносторонній трикутник.

11. На сторінці текст займає 384 см^2. Верхнє і нижнє поля повинні бути по 2 см, праве і ліве — по 3 см. Якими повинні бути розміри сторінки з точки зору економії паперу?

12*. У прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см і кутом 60° вписано прямокутник найбільшої площі так, що одна з його сторін лежить на гіпотенузі, а дві вершини — на катетах. Визначте більшу із сторін прямокутника.

13*. З трикутників, що мають даний кут α, який знаходиться між сторонами, сума довжин яких постійна і дорівнює a, знайдіть такий, який має найменший периметр.

14*. У кулю радіуса R вписано циліндр, що має найбільшу бічну поверхню. Знайдіть об'єм цього циліндра.

15*. Точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, точка B — на осі Ox, і її абсциса дорівнює ординаті точки A. Знайдіть найменше значення площі трикутника OAB, де точка O — початок координат, а

$$f(x)=\sqrt{4x-2\sin 2x-9\cos x+12} \text{ і } \frac{5\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{12\pi}{5}.$$

16*. Знайдіть найбільше значення площі прямокутника із сторонами, паралельними осям координат, і діагоналлю OP, де точка O — початок координат, а P — точка на графіку функції $y=49xe^{2-7x}+\frac{9}{x}$ і $0{,}2\leqslant x\leqslant 1$.

17*. Знайдіть найбільше значення площі трикутника OPK, де O — початок координат, P — точка на графіку функції $y=\frac{5}{x}+64x^5e^{6-4x}$, $0{,}7\leqslant x\leqslant 2$, а K — точка на осі Ox, абсциса якої дорівнює абсцисі точки P.

18*. Точка A лежить на графіку функції $y = f(x)$, точка B — на осі Ox, і її абсциса в 2 рази більша за ординату точки A. Знайдіть найбільше значення площі трикутника OAB, де точка O — початок координат, а

$$f(x)=\sqrt{7+2\sin x-(2x+7)\cos x} \text{ і } \frac{2\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{5}.$$

19. Човен знаходиться на відстані 3 км від найближчої точки A берега. Пасажир човна хоче дістатися села B, яке розташоване на березі на відстані 5 км від A (дільницю AB берега вважаємо прямолінійною). Човен рухається із швидкістю 4 км/год; пасажир, вийшовши з човна, може пройти за годину 5 км. До якого пункту на березі має пристати човен, щоб пасажир прибув у село B за найкоротший час?

§7 ПОНЯТТЯ І ОСНОВНІ ВЛАСТИВОСТІ ГРАНИЦІ ФУНКЦІЇ І ГРАНИЦІ ПОСЛІДОВНОСТІ

7.1. Доведення основних теорем про границі

Таблиця 11

1. Означення границі функції в точці	
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$	**Число B називається границею функції $f(x)$ у точці a (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівність $\lvert x-a\rvert < \delta$, виконується нерівність $\lvert f(x)-B\rvert < \varepsilon$.**
2. Основні теореми про границі функції	
$\lim\limits_{x\to a} c = c$	*Границя сталої функції дорівнює цій самій сталій.*
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$	*Границя суми (різниці) двох функцій дорівнює сумі (різниці) їх границь, якщо границі доданків існують.*
$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$	*Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.*
$\lim\limits_{x\to a}(c\cdot f(x)) = c\cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$	*Сталий множник можна виносити за знак границі.*
$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (де $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$)	*Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.*
3. Поняття нескінченно малої функції при $x \to a$	
Функція $f(x)$, яка визначена в деякому околі точки a, називається нескінченно малою функцією при x, що прямує до a, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.	
4. Властивості нескінченно малих функцій	
1. *Якщо функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \to a$, то їх сума $\alpha(x)+\beta(x)$ і добутки $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ та $c\cdot\alpha(x)$ (де $c = const$) теж є нескінченно малими функціями при $x \to a$.* 2. *Якщо функція $\beta(x)$ нескінченно мала при $x \to a$ і для всіх x, які задовольняють умові $\lvert x-a\rvert < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність $\lvert\alpha(x)\rvert \leqslant \lvert\beta(x)\rvert$, то функція $\alpha(x)$ — теж нескінченно мала при $x \to a$.*	
5. Зв'язок означення границі функції в точці з нескінченно малими функціями	
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$	

Пояснення й обґрунтування

1. Означення границі функції в точці. Сформулюємо *означення границі функції у точці* (яке вже розглядалося на с. 19), використовуючи поняття δ-околу точки. Звичайно δ-околом точки a називають проміжок $(a-\delta;\ a+\delta)$, тобто всі значення x, які задовольняють нерівності $|x-a|<\delta$.

Нехай задано функцію $f(x)=2x+3$, $x\in(-\infty;+\infty)$, значення якої знайдені при деяких x із так званого δ-околу точки $x=2$ (тобто з інтервалу $(2-\delta,\ 2+\delta)$, де $\delta>0$).

x	1,9	1,99	1,999	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,8	6,98	6,998	7,002	7,02	7,2

З наведеної таблиці видно, що чим ближче x до 2, тим ближче до числа 7 значення $f(x)$, яке відповідає цьому x. Причому, вибираючи все менший δ-окіл точки 2, можна необмежено наближати значення $f(x)$ до числа 7 (тобто можна вибрати такий δ-окіл точки 2, щоб відстань від точок $f(x)$ до точки 7 на числовій прямій (тобто $|f(x)-7|$) стала меншою за будь-яке додатне число ε). Як уже відмічалося, у цьому випадку говорять, що число 7 є границею функції $f(x)$ у точці $x=2$ (або при x, що прямує до 2) і записують $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7$.

О з н а ч е н н я. Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки a, крім, можливо, самої точки a. **Число B називається границею функції $f(x)$ у точці a (або при x, що прямує до a), якщо для будь-якого числа $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що для всіх $x\neq a$ з δ-околу точки a (тобто при $x\neq a$ і $|x-a|<\delta$) виконується нерівність $|f(x)-B|<\varepsilon$.**

Проілюструємо застосування означення до обґрунтування того, що границя функції $f(x)$ при x, що прямує до a, дорівнює B.

У найпростіших випадках таке обґрунтування проводиться за схемою:

1) *для довільного додатного числа* ε *розглядають нерівність*
$$|f(x)-B|<\varepsilon;$$
2) *при всіх значеннях* $x\neq a$ *з деякого околу точки* a *одержують із цієї нерівності нерівність* $|x-a|<\delta$;
3) *пояснюють* (спираючись на рівносильність виконаних перетворень нерівності або на властивості нерівностей), *що при одержаному значенні* δ *(яке записують через* ε*) з нерівності* $|x-a|<\delta$ (при $x\neq a$) *випливає нерівність* $|f(x)-B|<\varepsilon$;
4) *використовуючи означення границі функції в точці* a, *роблять висновок, що* $\lim\limits_{x\to a}f(x)=B$.

Приклад 1 Використовуючи означення границі, перевірте, що $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7.$

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Нехай $f(x) = 2x + 3$ і ε — деяке додатне число ($\varepsilon > 0$). Розглянемо нерівність

$$|f(x)-7|<\varepsilon \qquad (1)$$

і знайдемо таке число $\delta > 0$, щоб за умови $|x - 2| < \delta$ виконувалася нерівність (1).

Враховуючи, що $|f(x)-7|=|(2x+3)-7|=|2x-4|=|2(x-2)|=2|x-2|$, нерівність $|f(x) - 7| < \varepsilon$ рівносильна нерівності $2|x - 2| < \varepsilon$, яка, у свою чергу, рівносильна нерівності $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$. Тому, якщо вибрати $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$, то за умови $|x - 2| < \delta$ буде виконуватися нерівність $|(2x + 3) - 7| < \varepsilon$, а це і значить, що $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=7.$ ◁

З а у в а ж е н н я. Як бачимо, вибір δ залежить від заданого значення ε. Щоб підкреслити цей факт, іноді записують $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Зазначимо, що точка a, у якій розглядається границя, може належати області визначення функції $f(x)$ (як у прикладі 1), а може і не належати їй.

Приклад 2 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Нехай $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ і $\varepsilon > 0$. Тоді на області визначення функції $f(x)$ (тобто при $x\neq 3$) маємо $|f(x)-6|=\left|\frac{x^2-9}{x-3}-6\right|=|(x+3)-6|=|x-3|.$

Якщо вибрати $\delta = \varepsilon$, то одержимо, що $|f(x) - 6| = |x - 3| < \varepsilon$, як тільки $|x - 3| < \delta$. Тому згідно з означенням границі $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$ ◁

Приклад 3 Доведіть, що границя постійної функції дорівнює тій самій постійній.

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Нехай $f(x) = c$ для всіх x із деякого околу точки a. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$: $|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$ при всіх x з вибраного околу точки a. Тому $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}c=c.$ ◁

Приклад 4 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to a}x=a.$

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Нехай $f(x) = x$ і вибране деяке додатне число ε. Якщо взяти $\delta = \varepsilon > 0$, одержимо, що $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$, як тільки $|x - a| < \delta$. Тому за означенням границі $\lim\limits_{x\to a}x=a.$ ◁

Приклад 5 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$.

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Нехай $f(x) = x^2$ і вибране деяке додатне число ε. Якщо взяти $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$, одержимо, що $|f(x) - 0| = |x^2| < \varepsilon$, як тільки $|x - 0| = |x| < \varepsilon$. Тому за означенням границі $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$. ◁

2. Основні теореми про границі функції. Поняття нескінченно малої функції при $x \to a$. За допомогою означення границі функції можна довести також *теорему про границю суми двох функцій*.

Границя суми двох функцій дорівнює сумі їх границь, якщо границі доданків існують:

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x).$$

● Задамо $\varepsilon > 0$. Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то знайдеться таке число $\delta_1 > 0$, що при $|x - a| < \delta_1$ (крім, можливо, $x = a$) виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Аналогічно, якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то знайдеться таке число $\delta_2 > 0$, що при $|x - a| < \delta_2$ (крім, можливо, $x = a$) виконується нерівність

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

Якщо вибрати як число δ найменше з чисел δ_1 і δ_2 (це можна позначати так: $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то ми виберемо спільну частину обох околів точки a, і при $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$) будуть виконуватися обидві нерівності (1) і (2). Тоді

$$|(f(x)+g(x)) - (A+B)| = |(f(x)-A) + (g(x)-B)| \leqslant |f(x)-A| + |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А це й означає, що $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = A + B$, тобто

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x). \ \bigcirc$$

Для доведення властивостей границі добутку і частки функцій зручно ввести поняття *нескінченно малої функції*.

Функція $f(x)$, яка визначена в деякому околі точки a, називається нескінченно малою функцією при x, що прямує до a, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Враховуючи означення границі функції в точці, це означення можна сформулювати так.

Функція $f(x)$, яка визначена в деякому околі точки a, називається нескінченно малою функцією при x, що прямує до a ($x \to a$), якщо для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність $|f(x)| < \varepsilon$.

Наприклад,

1) $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ (див. приклад 4), отже, $f(x) = x$ — нескінченно мала функція при $x \to 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ (див. приклад 5), отже, $f(x) = x^2$ — нескінченно мала функція при $x \to 0$.

Зауваження. **Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то це еквівалентно тому, що $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.**

Дійсно, якщо розглянути функцію

$$\alpha(x) = f(x) - A, \tag{3}$$

то $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}(f(x) - A) = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} A = A - A = 0$. А це й означає, що функція $\alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$. Але тоді рівність (3) еквівалентна рівності $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

Властивості нескінченно малих функцій

1. *Якщо функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ нескінченно малі при $x \to a$, то їх сума $\alpha(x) + \beta(x)$ і добутки $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ і $c \cdot \alpha(x)$ (де $c = const$) теж є нескінченно малими функціями при $x \to a$.*
2. *Якщо функція $\beta(x)$ нескінченно мала при $x \to a$ і для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|$, то функція $\alpha(x)$ теж нескінченно мала при $x \to a$.*

Доведемо ці властивості.

1. За умовою функції $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — нескінченно малі при $x \to a$. Це означає, що $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$. Тоді, використовуючи формулу границі суми, маємо

$$\lim_{x\to a}(\alpha(x) + \beta(x)) = \lim_{x\to a}\alpha(x) + \lim_{x\to a}\beta(x) = 0 + 0 = 0.$$

А це і означає, що сума $\alpha(x) + \beta(x)$ є нескінченно малою функцією.
З іншого боку, якщо функція $\alpha(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$, то це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta_1 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta_1$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\alpha(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Аналогічно якщо функція $\beta(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$, то це означає, що, наприклад, для $\varepsilon = 1$ можна вказати таке $\delta_2 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta_2$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\beta(x)| < 1. \tag{5}$$

Якщо вибрати як число δ найменше з чисел δ_1 і δ_2 ($\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$), то ми виберемо спільну частину обох околів точки a, і при $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$) будуть виконуватися обидві нерівності (4) і (5). Тоді $|\alpha(x) \cdot \beta(x)| = |\alpha(x)| \cdot |\beta(x)| < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$. А це й означає, що $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$.

Для обґрунтування того, що функція $c \cdot \alpha(x)$ (де $c = const$) є нескінченно малою, достатньо помітити, що при $c = 0$ це твердження виконується $\left(\lim\limits_{x\to a} 0 \cdot \alpha(x) = \lim\limits_{x\to a} 0 = 0\right)$, а при $c \neq 0$ для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{|c|}$. Тоді $|c \cdot \alpha(x)| = |c| \cdot |\alpha(x)| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$. А це й означає, що функція $c \cdot \alpha(x)$ (де $c = const$) є нескінченно малою при $x \to a$.

2. За умовою функція $\beta(x)$ — нескінченно мала при $x \to a$, тоді для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta_1 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta_1$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\beta(x)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Крім того, за умовою для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)|. \tag{7}$$

Тоді, якщо вибрати як число δ_2 найменше з чисел δ_1 і δ ($\delta_2 = \min\{\delta_1; \delta\}$), то ми виберемо спільну частину обох околів точки a, і при $|x - a| < \delta_2$ (крім, можливо, $x = a$) будуть виконуватися обидві нерівності (6) і (7). Тоді $|\alpha(x)| \leqslant |\beta(x)| < \varepsilon$. А це й означає, що функція $\alpha(x)$ теж є нескінченно малою при $x \to a$. ○

Доведемо теорему про границю добутку.

● Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то це еквівалентно тому, що $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

Аналогічно якщо $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то це еквівалентно тому, що $g(x) = B + \beta(x)$, де $\beta(x)$ — нескінченно мала функція при $x \to a$.

Тоді $f(x) \cdot g(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$. Враховуючи властивості нескінченно малих функцій, одержуємо, що функція $\varphi(x) = A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ — нескінченно мала. Отже, $f(x) \cdot g(x) = AB + \varphi(x)$, де $\varphi(x)$ — нескінченно мала функція. А це й означає, що $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = AB$, тобто

$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x). \ ○$$

Границя добутку двох функцій дорівнює добутку їх границь, якщо границі множників існують.

Відзначимо, що, використовуючи метод математичної індукції, правила обчислення границі суми і добутку можна узагальнити на випадок довільної кількості доданків або множників.

Використовуючи правило обчислення границі добутку, одержуємо:

$\lim\limits_{x\to a}(cf(x))=\lim\limits_{x\to a}c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)=c\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$. Отже,

$$\lim_{x\to a}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim_{x\to a}f(x) \text{ —}$$

сталий множник можна виносити за знак границі.

Для доведення теореми про *границю частки* $\frac{f(x)}{g(x)}$ спочатку розглянемо випадок, коли $f(x) = 1$, тобто доведемо твердження:

$$\boxed{\text{якщо } \lim_{x\to a}g(x)=B \text{ (де } B\neq 0\text{), то } \lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}}\,.$$

За умовою $\lim\limits_{x\to a}g(x)=B$ (де $B \neq 0$). Це еквівалентно тому, що $g(x) = B + \beta(x)$, де $\beta(x)$ — нескінченно мала функція при $x\to a$. Тоді для $\varepsilon=\frac{|B|}{2}>0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x-a|<\delta$ (крім, можливо, $x = a$), виконується нерівність

$$|\beta(x)|<\frac{|B|}{2}. \qquad (8)$$

Використовуючи нерівність $|a+b|\geqslant|a|-|b|$ (с. 14) і нерівність (8), одержуємо: $|g(x)|=|B+\beta(x)|\geqslant|B|-|\beta(x)|>|B|-\frac{|B|}{2}=\frac{|B|}{2}$. Отже, для вибраних значень x

$$|g(x)|>\frac{|B|}{2}. \qquad (9)$$

Розглянемо для вибраних значень x вираз $\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|$ і врахуємо нерівність (9):

$$\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|B-g(x)|}{|g(x)|\cdot|B|}=\frac{|g(x)-B|}{|g(x)|\cdot|B|}=\frac{|\beta(x)|}{|g(x)|\cdot|B|}<\frac{2}{|B|^2}\cdot|\beta(x)|=\left|\frac{2}{B^2}\cdot\beta(x)\right|.$$

Оскільки функція $\beta(x)$ нескінченно мала (при $x\to a$), то функція $\frac{2}{B^2}\cdot\beta(x)$ теж нескінченно мала $\left(\frac{2}{B^2}=const\right)$. Тоді за властивістю 2 нескінченно малих функцій (с. 114) одержуємо, що функція $\gamma(x)=\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{B}$ є нескінченно малою при $x\to a$, а це й означає, що $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}$.

Тоді, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$ і $\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$ (де $B\neq 0$), то, використовуючи формулу границі добутку і одержану формулу, маємо:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=A\cdot\frac{1}{B}=\frac{A}{B}.$$ Отже,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \left(\text{де } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0\right).$$

Границя частки двох функцій дорівнює частці їх границь, якщо границі чисельника і знаменника існують і границя знаменника не дорівнює нулю.

Приклад 6 Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-5x+6)$.

Розв'язання. Застосовуючи теореми про границі суми, різниці та добутку, одержуємо:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-5x+6)=\lim_{x\to 1}(3x^2)-\lim_{x\to 1}(5x)+\lim_{x\to 1}6=3\lim_{x\to 1}x^2-5\lim_{x\to 1}x+6=$$

$$=3(\lim_{x\to 1}x)\cdot(\lim_{x\to 1}x)-5\cdot 1+6=3\cdot 1\cdot 1-5+6=4.$$

Відповідь: 4.

Приклад 7 Знайдіть $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Розв'язання. Тут границя знаменника дорівнює нулю, тому скористатися теоремою про границю частки не можна.

Розкладемо чисельник на множники: $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$.

Оскільки при знаходженні границі в точці 3 розглядаються тільки значення $x\neq 3$, то дріб можна скоротити на $x-3\neq 0$, і тому

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-2)=3-2=1.$$

Відповідь: 1.

Теорема про єдиність границі. ***Якщо функція f (x) у точці має границю, то ця границя єдина.***

Доведення. Проведемо доведення методом від супротивного. Нехай у точці $x=a$ функція $f(x)$ має дві різні границі A і B. За означенням границі для будь-якого $\varepsilon>0$ існують $\delta_1(\varepsilon)>0$ і $\delta_2(\varepsilon)>0$ такі, що для всіх x, які задовольняють умові $|x-a|<\delta_1\ (x\neq a)$, виконується нерівність

$$|f(x)-A|<\varepsilon, \qquad (10)$$

а для всіх x, які задовольняють умові $|x-a|<\delta_2\ (x\neq a)$, виконується нерівність

$$|f(x)-B|<\varepsilon. \qquad (11)$$

З чисел δ_1 і δ_2 можна вибрати найменше. Позначимо його буквою δ ($\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$). Якщо взяти деяке $x \neq a$, яке задовольняє нерівності $|x - a| < \delta$, то для нього виконуються обидві нерівності (10) і (11).
Пригадуючи, що модуль суми двох доданків не перевищує суми модулів цих доданків, маємо:

$$|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leqslant |A - f(x)| + |f(x) - B| =$$
$$= |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Оскільки ε — довільне додатне число, то візьмемо $\varepsilon = \frac{|A - B|}{4}$. Тоді одержимо $|A - B| < \frac{1}{2}|A - B|$, тобто $|A - B| < 0$. Але ця нерівність не може виконуватися. Отже, наше припущення про існування двох границь неправильне, і тому $A = B$.

При вивченні границь нам іноді доведеться виконувати граничний перехід у нерівностях, який можна здійснювати за допомогою такої теореми.

Теорема. ***Якщо*** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, ***причому в деякому околі точки а (крім, можливо, самої точки а) справедлива нерівність*** $f(x) \leqslant \varphi(x)$, ***то*** $A \leqslant B$.

Доведення (методом від супротивного). Припустимо протилежне, тобто що $A > B$. Виберемо два ε-околи точок A і B, а саме: $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ і $(B - \varepsilon; B + \varepsilon)$, які не перетинаються, тобто

$$A - \varepsilon > B + \varepsilon. \tag{12}$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то знайдеться δ_1-окіл точки a, у якому $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon. \tag{13}$$

Також існує δ_2-окіл точки a, у якому $|\varphi(x) - B| < \varepsilon$, тобто

$$B - \varepsilon < \varphi(x) < B + \varepsilon. \tag{14}$$

З чисел δ_1 і δ_2 виберемо найменше і позначимо його через δ. Тоді в δ-околі точки a маємо (враховуючи нерівності (12)–(14)):

$$\varphi(x) < B + \varepsilon < A - \varepsilon < f(x),$$

і тому $f(x) > \varphi(x)$, але це суперечить умові. Отже, $A \leqslant B$.

Наслідок (границя проміжної функції). ***Якщо*** $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$ ***і в деякому околі точки а (крім, можливо, самої точки а) справедлива нерівність***

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{15}$$

то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$.

Доведення. Оскільки всі умови останньої теореми виконуються, то здійснимо граничний перехід у нерівностях (15). Одержуємо $B \leqslant \lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant B$. Але ці нерівності можуть виконуватися тільки в тому випадку, коли $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, що і треба було довести.

7.2. Односторонні границі

У наведеному в пункті 7.1 означенні границі функції в точці аргумент x набуває всіх значень з δ-околу точки a (крім, можливо, $x = a$) як ліворуч, так і праворуч від точки a.

Якщо при знаходженні границі розглядати значення x тільки ліворуч від точки a, то така границя називається ***лівою***, або ***лівосторонньою***, границею і позначається $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ або $f(a - 0)$; а якщо розглядати значення x тільки праворуч від точки a, то така границя називається ***правою***, або ***правосторонньою***, границею і позначається $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ або $f(a + 0)$.

Лівосторонні та правосторонні границі називаються ***односторонніми*** границями. Для випадку, коли розглядають односторонні границі в точці $x = 0$ (тобто при $x \to 0$), запис спрощують і записують для лівосторонньої границі $\lim\limits_{x\to -0} f(x)$ або $f(-0)$, а для правосторонньої границі $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ або $f(+0)$.

Сформулюємо тепер означення односторонніх границь.

О з н а ч е н н я. **Число B_+ називається правосторонньою границею функції $f(x)$ у точці a, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta > 0$, що для всіх x з області визначення функції, які задовольняють умові $a < x < a + \delta$, виконується нерівність**

$$|f(x) - B_+| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Аналогічно означається число $B_- = f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ — лівостороння границя функції $f(x)$ у точці a. Тут нерівність

$$|f(x) - B_-| < \varepsilon \qquad (2)$$

повинна виконуватися для всіх x із лівої частини δ-околу точки a, тобто при $a - \delta < x < a$.

Відзначимо зв'язок між односторонніми границями та границею функції в деякій точці a.

Якщо число B є границею функції $f(x)$ при $x \to a$, то нерівність

$$|f(x) - B| < \varepsilon \qquad (3)$$

справедлива для всіх значень x із δ-околу точки a ($x \neq a$). Тоді ця нерівність справедлива для всіх значень x із лівої половини вказаного δ-околу і для всіх x з її правої половини, тобто існують лівостороння і правостороння границі в точці a, і ці границі дорівнюють B. Тому,

якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, тобто $B_- = B_+ = B$.

Має місце і обернене твердження: якщо виконується рівність $B_- = B_+ = B$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.

Дійсно, якщо $B_- = B_+ = B$, то нерівність (1), яка визначає існування правосторонньої границі функції, виконується і зліва від точки a (згідно з нерівністю (2)), але тоді нерівність (1) фактично перетворюється на нерівність (3), і тому $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$.

У зв'язку з цим можна сформулювати такий критерій.

Критерій існування границі. **Для того щоб у точці $x = a$ існувала границя B функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб у цій точці існувала лівостороння границя функції $f(x)$, тобто $B_- = f(a - 0)$, і правостороння границя функції $f(x)$, тобто $B_+ = f(a + 0)$, і щоб вони дорівнювали одна одній: $B_- = B_+ = B$, при цьому**

$$\lim_{x\to a} f(x) = B.$$

Приклад 1 З'ясуйте існування границі функції $f(x) = |x|$ у точці 0.

Розв'язання. Функція $f(x) = |x|$ визначена на всій числовій прямій.

Оскільки $f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geqslant 0, \\ -x \text{ при } x < 0 \end{cases}$ (див. рис. 18), то при $x < 0$ $f(x) = -x$, тому $f(-0) = \lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0}(-x) = 0$. Аналогічно $f(+0) = \lim\limits_{x\to +0} f(x) = \lim\limits_{x\to +0} x = 0$.

Таким чином, $f(-0) = f(+0) = 0$. Оскільки односторонні границі в точці 0 співпадають, то границя функції $f(x)$ існує і дорівнює їх спільному значенню, тобто $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.

Приклад 2 З'ясуйте існування границі в точці 2 для функції

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 \text{ при } x \leqslant 2, \\ 4 \text{ при } x > 2. \end{cases}$$

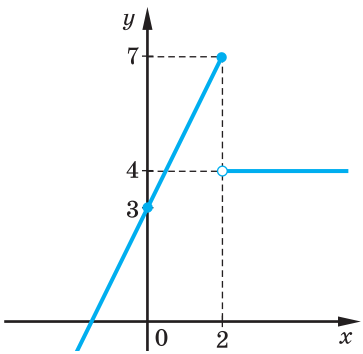


Рис. 70

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій прямій. Знайдемо односторонні границі цієї функції в точці $x = 2$.

$f(2-0) = \lim\limits_{x\to 2-0}(2x+3) = 7$ (див. приклад 1 з пункту 7.1, с. 112);

$f(2+0) = \lim\limits_{x\to 2+0} 4 = 4$ (див. приклад 3 з пункту 7.1, с. 112). Тобто $f(2 - 0) \neq f(2 + 0)$, і тому задана функція не має границі в точці $x = 2$ і не є неперервною в цій точці. (Графік цієї функції зображено на рисунку 70.)

7.3. Неперервні функції

Нагадаємо, що функція $f(x)$ називається неперервною в точці a, якщо

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a).$$

Доведені властивості границі функції дозволяють обґрунтувати **властивості неперервних функцій**, які наведено в таблиці 2 (с. 20):

якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то **сума, добуток і частка неперервних у точці *a* функцій неперервні в точці *a*** (частка у випадку, коли дільник $g(a)\neq 0$).

Дійсно, якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці a, то

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ і } \lim_{x\to a} g(x)=g(a).$$

Тоді $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a),$ а це й означає, що функція $f(x)+g(x)$ неперервна в точці a. Аналогічно обґрунтовується неперервність добутку і частки двох неперервних функцій.

Згідно з означенням, *неперервність функції $f(x)$ у точці x_0 означає виконання таких умов:*

1) *функція $f(x)$ повинна бути визначена в точці x_0;*

2) *у функції $f(x)$ повинна існувати границя в точці x_0;*

3) *границя функції в точці x_0 співпадає із значенням функції в цій точці.*

Наприклад, функція $f(x)=x^2$ визначена на всій числовій прямій і $\lim\limits_{x\to 1} x^2=1$. Оскільки $f(1)=1$, то значення $f(x)=x^2$ у точці 1 співпадає з границею цієї функції при $x\to 1$, тому за означенням функція $f(x)=x^2$ неперервна в точці $x=1$.

Якщо використати означення лівосторонньої та правосторонньої границь, то можна означити лівосторонню та правосторонню неперервність функції, а саме: функція називається ***неперервною зліва*** в точці a, якщо $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=f(a)$, і ***неперервною справа*** у точці a, якщо $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$.

Наприклад, функція $f(x)=\{x\}$, де $\{x\}$ — дробова частина числа x, неперервна в будь-якій точці, крім цілочисельних значень аргументу x, у яких вона неперервна справа (рис. 71).

Функція називається *неперервною на інтервалі* $(a; b)$, якщо вона неперервна в кожній його точці. Функція називається *неперервною на відрізку* $[a; b]$, якщо вона неперервна на інтервалі $(a; b)$, неперервна справа в точці a і неперервна зліва в точці b.

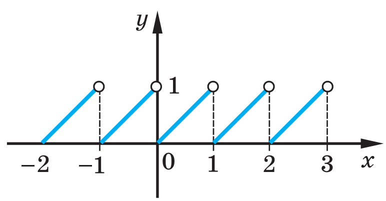


Рис. 71

Якщо в точці a рівність $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ не виконується, функція $f(x)$ нази-

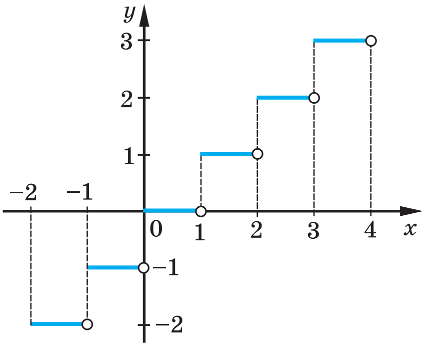


Рис. 72

вається ***розривною*** в точці a (а сама точка називається ***точкою розриву*** функції $f(x)$).

Наприклад, функція із прикладу 2 є розривною в точці 2.

Якщо розглянути функцію $y = [x]$ ($[x]$ — ***ціла частина*** x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x), то ця функція є розривною в кожній цілочисельній точці (рис. 72).

Аналогічно для функції $y = \{x\}$ ($\{x\}$ — ***дробова частина*** x, тобто різниця $x - [x]$) точками розриву є всі цілочисельні значення аргументу x (див. рис. 71).

Поняття неперервності функції можна пов'язати з поняттям приросту функції та аргументу.

Нехай задана функція $f(x)$ з областю визначення $D(f) = (a; b)$ і нехай x_0 — деяке значення аргументу з інтервалу $(a; b)$. Тоді якщо $x \in (a; b)$ — інше фіксоване значення аргументу, то різниця $x - x_0$ називається ***приростом аргументу*** і позначається Δx, тобто $\Delta x = x - x_0$. Тоді в цих позначеннях $x = x_0 + \Delta x$.

Різниця $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ називається ***приростом функції*** f у точці x_0 і позначається Δf.

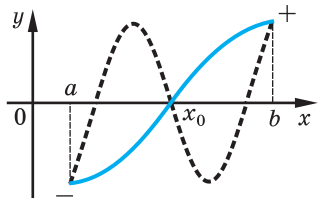
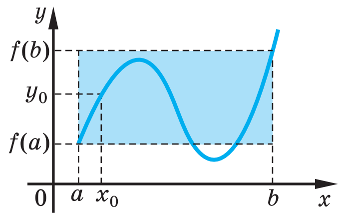
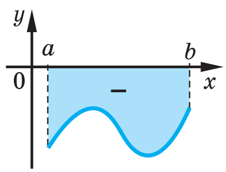
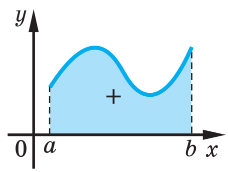
Очевидно, що у випадку, коли x прямує до x_0, приріст аргументу прямує до нуля: $\Delta x \to 0$. Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то за означенням $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, і тому $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, а це означає, що $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$.

З останнього співвідношення одержуємо, що у випадку, коли функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, то малому приросту аргументу відповідає малий приріст функції. Враховуючи цю властивість, ми будуємо графік неперервної функції у вигляді суцільної лінії (не відриваючи олівця від паперу).

Уявлення про неперервну функцію як про функцію, графік якої можна намалювати, не відриваючи олівця від паперу, добре підтверджується властивостями неперервних функцій, які доводяться в курсах математичного аналізу. Наведемо приклади таких властивостей (табл. 12).

Відзначимо, що відомі вам елементарні функції неперервні в будь-якій точці своєї області визначення. Графіки таких функцій зображуються суцільними кривими на будь-якому інтервалі, який цілком входить до області визначення (саме на цій властивості і обґрунтовується спосіб побудови графіка функції «по точках»). Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ неперервна на будь-якому інтервалі, який не містить точку 0 (див. рис. 45).

Таблиця 12

Властивості неперервних функцій	Ілюстрація
1. Якщо неперервна на відрізку $[a; b]$ функція набуває на кінцях цього відрізка значення різних знаків, то в деякій точці цього відрізка вона набуває значення, яке дорівнює нулю.	
2. Функція $f(x)$, яка неперервна на відрізку $[a; b]$, набуває всіх проміжних значень між значеннями цієї функції в кінцевих точках, тобто між $f(a)$ і $f(b)$.	
3. Якщо на інтервалі $(a; b)$ функція $f(x)$ неперервна і не перетворюється на нуль, то на цьому інтервалі функція зберігає постійний знак.	 

Властивості неперервних функцій дозволяють коректно обґрунтувати метод інтервалів розв'язування нерівностей, наведений у підручнику 10 класу, і тому цей метод можна використовувати при розв'язуванні будь-яких нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$, де $f(x)$ — неперервна в будь-якій точці своєї області визначення функція (див. також с. 20–24).

7.4. Границя функції на нескінченності. Нескінченна границя функції. Границя послідовності

Часто при вивченні функцій виникає потреба знайти границю функції на нескінченності, тобто знайти таке число B (якщо воно існує), до якого прямує функція $f(x)$ при необмеженому зростанні аргументу x, або коли x, збільшуючись за абсолютною величиною, залишається від'ємним.

Розглянемо функцію $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2 + 1}$. Очевидно, що при збільшенні x знаменник дробу збільшується, і тому значення цього дробу стає як завгодно

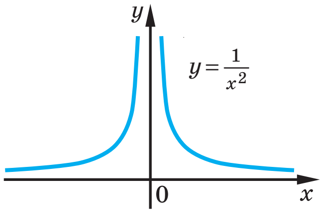


Рис. 73

малим за абсолютною величиною. Таким чином, значення функції $f(x)$ при дуже великих значеннях аргументу x мало відрізняється від числа 2. У цьому випадку говорять, що функція $f(x)$ має своєю границею число 2 при $x \to \infty$, і пишуть: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$.

Означення. **Нехай функція $f(x)$ визначена на всій числовій прямій (або при всіх досить великих за модулем значеннях x). Число B називається границею $f(x)$ при $x \to \infty$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $M > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x| > M$, виконується нерівність $|f(x) - B| < \varepsilon$.**

У цьому випадку пишуть: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=B$.

У деяких випадках поведінка функції $f(x)$ різна при $x \to -\infty$ та при $x \to +\infty$. Тому при дослідженні властивостей функції іноді окремо розглядають $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Ці границі означаються повністю аналогічно до $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, тільки в тексті означення умова $|x| > M$ замінюється відповідно на $x < -M$ і $x > M$.

Крім розглянутих випадків скінченних границь функції $f(x)$ при $x \to a$ (або при $x \to \infty$), іноді використовується також поняття нескінченної границі. Наприклад, функція $f(x)=\frac{1}{x^2}$, яка визначена для всіх $x \neq 0$ (рис. 73), набуває яких завгодно великих значень при $x \to 0$. У цьому випадку говорять, що функція в точці $x = 0$ має нескінченну границю і пишуть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$.

Означення. ***Будемо вважати, що $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x - a| < \delta$ $(x \neq a)$, виконується нерівність $|f(x)| > M$.***

У математиці також використовується поняття нескінченної границі при $x \to \infty$, тобто границі типу $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$, яка означається так: *якщо для довільного числа $M > 0$ існує таке число $M_0 > 0$, що для всіх x, які задовольняють умові $|x| > M_0$, виконується умова $|f(x)| > M$, то говорять, що функція $f(x)$ має **нескінченну границю на нескінченності**.*

Наприклад, $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=+\infty$. Цей факт виражає відому властивість функції $f(x) = x^2$, яка необмежено зростає при збільшенні значень $|x|$.

Приклад 1 Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}$.

Розв'язання. ▶ Винесемо в чисельнику і знаменнику за дужки найвищий степінь змінної і скоротимо чисельник і знаменник на x^3. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{5+x^2-x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}-1}=\frac{2}{-1}=-2.$$

Відповідь: -2. ◁

Приклад 2 Знайдіть границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)$.

Розв'язання. ▶ Помножимо і розділимо різницю, яка стоїть під знаком границі, на суму $\sqrt{x^2+5}+x$. Одержимо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+5}-x\right)\left(\sqrt{x^2+5}+x\right)}{\sqrt{x^2+5}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+5-x^2}{\sqrt{x^2+5}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+5}+x}=0.$$

Відповідь: 0. ◁

Нагадаємо, що у випадку, коли $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, функція називається нескінченно малою при $x\to a$. Якщо ж $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$, то функція називається *нескінченно великою при* $x\to a$. Аналогічно означаються ***нескінченно малі і нескінченно великі функції*** при $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$.

Зазначимо, що у випадку, коли функція $f(x)$ є нескінченно малою при $x\to a$ та $f(x)\neq 0$ для $x\neq a$ з деякого околу точки a, то функція $\frac{1}{f(x)}$ буде нескінченно великою при $x\to a$. І навпаки, якщо функція $f(x)$ нескінченно велика при $x\to a$, то функція $\frac{1}{f(x)}$ нескінченно мала при $x\to a$.

Наприклад, функція $f(x)=x$ є нескінченно малою при $x\to 0$ і нескінченно великою при $x\to\infty$ (а також при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$). Тоді функція $f(x)=\frac{1}{x}$ є нескінченно малою при $x\to\infty$ (при $x\to-\infty$ і при $x\to+\infty$) і нескінченно великою при $x\to 0$ (аналогічно при $x\to-0$ і при $x\to+0$).

Границя послідовності

Досить поширеними в курсі математики є нескінченні *послідовності*, тобто *функції* $y=f(n)$, *задані на множині натуральних чисел* N. Щоб підкреслити, що аргумент такої функції набуває тільки значень з множини натуральних чисел, його позначають не x, а n. Для послідовності $f(n)$ достатньо часто виникає необхідність знайти її границю при необмеженому зростанні аргументу n (при $n \to +\infty$). Означення цієї границі в основному аналогічне означенню границі функції на нескінченності.

Означення. **Число B називається границею послідовності $f(n)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M > 0$, що для всіх $n > M$ виконується нерівність $|f(n) - B| < \varepsilon$.**

Для границь послідовності виконуються всі відомі вам теореми про границі.

Приклад 3 Знайдіть границю послідовності $f(n) = \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2}$.

Розв'язання. Як і в прикладі 1, винесемо в чисельнику і в знаменнику за дужки найвищий степінь змінної, скоротимо чисельник і знаменник на n, а потім використаємо теореми про границі. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+1}}{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{n\left(3-\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = 1.$$

Відповідь: 1.

7.5. Границя відношення $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$

Цю границю звичайно називають *чудовою границею* (точніше *першою чудовою границею*), оскільки її часто доводиться використовувати при знаходженні границь тригонометричних функцій.

Теорема. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Доведення. Можна вважати, що x набуває тільки додатних значень.

Це випливає з того, що функція $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ є парною функцією, оскільки

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x).$$

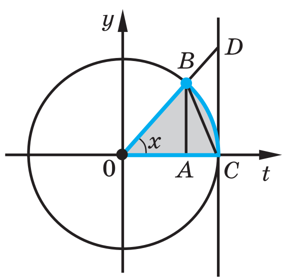


Рис. 74

Оскільки $x \to 0$, то, починаючи з деякого моменту, x попадає в першу чверть. Тому можна вважати, що $0 < x < \frac{\pi}{2}$. На рисунку 74 зображено одиничне коло, на якому відкладений кут у x радіан і проведена лінія тангенсів CD. Враховуючи означення синуса і тангенса через одиничне коло, одержуємо $AB = \sin x$, а $CD = \operatorname{tg} x$. Порівняємо площі трикутників OBC, ODC і сектора OBC. Ці площі задовольняють нерівності

$$S_{\Delta\, OBC} \leqslant S_{\text{сект.}\, OBC} \leqslant S_{\Delta\, ODC}. \qquad (1)$$

Оскільки

$$S_{\Delta OBC} = \frac{1}{2} OC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}; \quad S_{\Delta ODC} = \frac{1}{2} OC \cdot DC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2},$$

а площа кругового сектора OBC дорівнює: $S_{\text{сект.}\, OBC} = \frac{x}{2}$, то, підставляючи всі ці значення в нерівність (1), одержимо

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x. \qquad (2)$$

Оскільки $0 < x < \frac{\pi}{2}$, маємо $\sin x > 0$ (і $\cos x > 0$). Тому, поділивши нерівність (2) на $\sin x$, одержимо: $1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$. Звідси $\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1$ (враховуючи парність функцій $\cos x$ та $\frac{\sin x}{x}$, одержуємо, що ця нерівність виконується і при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$). Але $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1$. Тоді за теоремою про границю проміжної функції маємо $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ◯

Крім границі $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, часто використовують деякі її варіації.

Приклад 4 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

▶ Доведення. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{(\cos x) \cdot x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$. ◁

Приклад 5 Довести, що $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$.

▶ Доведення. Очевидно, що $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$. Дійсно,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha}} = 1.$$

Оскільки $\alpha \to 0$, то, починаючи з деякого моменту, α попадає у відрізок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ($\alpha \neq 0$). Позначимо $\sin\alpha = x$, тоді $\alpha = \arcsin x$. Якщо $\alpha \to 0$, то $x = \sin\alpha \to 0$. У цих позначеннях границя $\lim\limits_{\alpha\to 0} \frac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$. перетворюється на границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$. ◁

Приклад 6 Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

Доведення. Спочатку розглянемо границю

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\cos\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha}{\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}}=\frac{1}{1}=1.$$

Оскільки $\alpha\to 0$, то, починаючи з деякого моменту, α попадає в інтервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $(\alpha\neq 0)$. Позначимо $\operatorname{tg}\alpha=x$, тоді $\alpha=\operatorname{arctg} x$. Якщо $\alpha\to 0$, то $x=\operatorname{tg}\alpha\to 0$.

У цих позначеннях з границі $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1$, одержуємо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$ ◁

7.6. Практичне обчислення границі функції

При обчисленні границі функції звичайно застосовують не означення границі, а теореми про границі та прийоми, які ми використовували при знаходженні границь у наведених вище прикладах. Узагальнимо ці прийоми, оформивши результат у формі таблиці.

Таблиця 13

Обчислення границі функції $\lim\limits_{x\to a} f(x)$	
Основні етапи	Приклад
1. Користуючись неперервністю функції $f(x)$, пробуємо підставити значення $x=a$ до $f(x)$.	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{9-x^2}{x-1}=\frac{9-2^2}{2-1}=5$
2. Якщо обчислюється границя при $x\to\infty$, то пробуємо в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь змінної.	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{9x^4+2x}}{x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x^3}}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x^3}}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0-\sqrt{9+0}}{1-0+0}=-3$
3. Якщо в результаті підстановки $x=a$ одержали вираз виду $\left(\frac{0}{0}\right)$, то:	
а) пробуємо чисельник і знаменник розкласти на множники	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6$

Продовж. табл. 13

б) якщо до чисельника або знаменника входять вирази з квадратним або кубічним коренями, то множимо чисельник і знаменник на відповідні вирази, щоб позбавитися заданих коренів (іноді вводять заміну: вираз із коренем позначають новою змінною)	<u>1 спосіб</u> $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x^2-16)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$ $=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4}=$ $=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)\left(\sqrt{x}+2\right)=(4+4)\left(\sqrt{4}+2\right)=32$ <u>2 спосіб</u>. Позначимо $\sqrt{x}=t$. Тоді $x=t^2$. При $x\to 4$ значення $t\to 2$. Тоді $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{t\to 2}\frac{t^4-16}{t-2}=\lim\limits_{t\to 2}\frac{(t^2-4)(t^2+4)}{t-2}=$ $=\lim\limits_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2}=$ $=\lim\limits_{t\to 2}(t+2)(t^2+4)=(2+2)(2^2+4)=32$
в) якщо під знаком границі стоять тригонометричні або обернені тригонометричні функції, то такі границі зводять до першої чудової границі або до її варіацій: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1;$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1;\quad \lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot\cos 2x\cdot\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 7x\cdot\arcsin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5x\cdot\cos 2x\cdot\left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x}\right)\cdot 3x}{\left(\frac{\operatorname{tg} 7x}{7x}\right)\cdot 7x\cdot\left(\frac{\arcsin 4x}{4x}\right)\cdot 4x}.$ Скорочуємо чисельник і знаменник на змінні, які стоять за дужками. Враховуючи, що $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=1$, і скориставшись першою чудовою границею та її варіаціями, одержуємо, що шукана границя дорівнює: $\frac{1\cdot 5\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 7\cdot 1\cdot 4}=\frac{15}{28}$.

Запитання для контролю

1. Дайте означення границі функції в точці.
   Сформулюйте і доведіть основні теореми про границю.
2. Дайте означення нескінченно малої функції при $x\to a$.
   Сформулюйте і доведіть властивості нескінченно малих функцій.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність границі функції.
4. Сформулюйте і доведіть властивість границі проміжної функції.
5. Дайте означення правосторонньої і лівосторонньої границі функції $f(x)$ у точці a.

6. Сформулюйте і обґрунтуйте критерій існування границі.
7. Сформулюйте означення неперервної функції.
Сформулюйте і обґрунтуйте властивості суми, добутку і частки неперервних у точці a функцій.
8. Сформулюйте і проілюструйте на прикладах інші властивості неперервних функцій.
9. У якому випадку точка a називається точкою розриву функції $f(x)$? Проілюструйте це поняття на графіках функцій.
10. Дайте означення границі функції на нескінченності та нескінченної границі функції. Наведіть приклади.
11. Дайте означення границі послідовності. Наведіть приклади.
12. Доведіть, що $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.
13. Користуючись таблицею 13, запропонуйте план обчислення таких границь:
а) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x}{x^3+2}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^3+x}{x^3+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$.
Обчисліть ці границі.

Вправи

1. Користуючись означенням границі функції, доведіть справедливість рівності:
1) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-1)=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}(8-2x)=0$;
3) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-36}{4x-12}=6$; 4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=-1$.

2. Користуючись означенням границі послідовності, доведіть справедливість рівності:
1) $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{8n+7}{2n}=4$; 2) $\lim\limits_{n\to \infty}\frac{9n-5}{3n}=3$.

3. Користуючись теоремами про границі, доведіть, що:
1) многочлен $P(x)$ є неперервною функцією при всіх значеннях x;
2) раціональна функція неперервна при всіх значеннях x, для яких її знаменник не дорівнює нулю.

4. У яких точках має розрив функція (відповідь обґрунтуйте):
1) $f(x)=\frac{1}{x+3}$; 2) $g(x)=\frac{1}{x^2-4}$; 3) $\varphi(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$; 4) $\psi(x)=\frac{x+2}{x^2+2x-3}$?

5. Обчисліть границю:
1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-5x+3)$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+2x+1}{x-3}$; 3) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{3x^2+7x-1}{x^3+4x^2-2x+1}$;
4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^3-7x^2+5x-2}{4x^2+6x-8}$; 5) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{4-x}$; 8) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 9) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+7}}$;

13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cdot\sin 4x}{2x^2}$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x\cdot\cos x}{\operatorname{arctg} 4x}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 7x\cdot\arcsin 2x}{\sin 3x\cdot\sin 5x}$.

6. Розв'яжіть нерівність методом інтервалів:

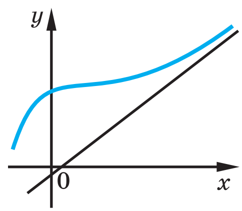
1) $\dfrac{x^2-2x+1}{(2-x)x}\leqslant 0$; 2) $\dfrac{x^3+2x^2-3x}{(x-1)(x-2)}\leqslant 0$; 3) $\dfrac{x^2-x-6}{\sqrt{12+x-x^2}}\geqslant 0$;

4) $\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x^2+x-6}}\leqslant 0$; 5) $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$; 6) $\sqrt{x^2-5x+4}>x-3$;

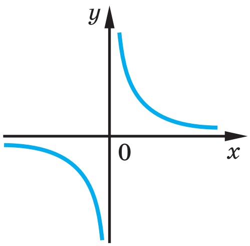
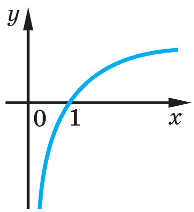
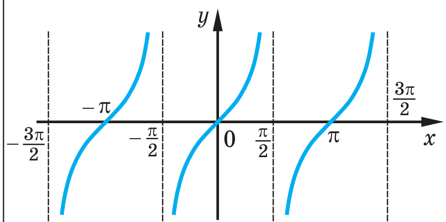
7) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}>1$; 8) $\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}<3$.

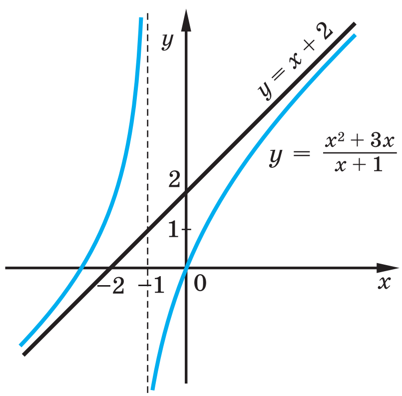
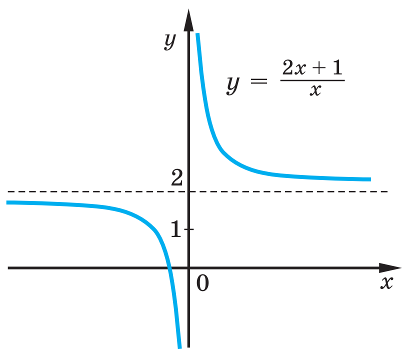
§8 АСИМПТОТИ ГРАФІКА ФУНКЦІЇ

Таблиця 14

1. Означення й ілюстрація	
Асимптота кривої — це пряма, до якої необмежено наближається крива при її віддаленні на нескінченність.	
2. Вертикальні асимптоти ($x = a$) графіка функції $y = f(x)$	
$x = a$ — вертикальна асимптота, якщо при $x \to a$ $f(x) \to \infty$	Вертикальна асимптота $x = a$ може бути в точці a, якщо точка a обмежує відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення даної функції і біля точки a значення функції прямує до нескінченності.

Продовж. табл. 14

Приклади вертикальних асимптот графіків функцій		
$\boldsymbol{y=\frac{1}{x}}$	$\boldsymbol{y=\ln x}$	$\boldsymbol{y=\operatorname{tg} x}$
$D(y)=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$. При $x\to+0$ $y\to+\infty$; при $x\to-0$ $y\to-\infty$. **$x=0$ — вертикальна асимптота** (також $y=0$ — *горизонтальна асимптота*) 	$D(y)=(0;\infty)$. При $x\to+0$ $y\to-\infty$. **$x=0$ — вертикальна асимптота** 	$D(y)$: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$. При $x\to\frac{\pi}{2}-0$ $y\to+\infty$; при $x\to\frac{\pi}{2}+0$ $y\to-\infty$. **$x=\frac{\pi}{2}$ — вертикальна асимптота** $\left(x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}\right)$ 

3. Похилі та горизонтальні асимптоти ($\boldsymbol{y=kx+b}$)	
I. *Якщо $f(x)$ — дробово-раціональна функція, у якій степінь чисельника на одиницю більший від степеня знаменника (або дорівнює йому), то виділяємо цілу частину дробу і використовуємо означення асимптоти*	
Приклади	
$f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}=x+2-\frac{2}{x+1}$. 	$f(x)=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$. 

Продовж. табл. 14

При $x \to \infty$ $\frac{2}{x+1} \to 0$, тоді $f(x) \to x+2$. Отже, $y = x + 2$ — похила асимптота (також $x = -1$ — вертикальна асимптота)	При $x \to \infty$ $\frac{1}{x} \to 0$, тоді $f(x) \to 2$. Отже, $y = 2$ — горизонтальна асимптота (також $x = 0$ — вертикальна асимптота)
II. У загальному випадку рівняння похилих і горизонтальних асимптот $y = kx + b$ можна одержати з використанням формул: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ $\quad$ $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$	

Пояснення й обґрунтування

1. Означення асимптоти. Якщо крива $y = f(x)$ має нескінченну вітку, то асимптотою такої кривої називається пряма, до якої ця вітка необмежено наближається.

Іншими словами, **асимптота кривої — це пряма, до якої необмежено наближається крива при її віддаленні на нескінченність.**

Асимптоти можуть бути вертикальними, горизонтальними або похилими.

Наприклад, для графіка функції $y = \frac{1}{x}$ (рис. 75) асимптотами будуть осі координат, оскільки при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$ графік функції наближається до прямої $y = 0$: вісь Ox — це *горизонтальна асимптота*. А коли функція прямує до $+\infty$ (або до $-\infty$), то крива наближається до прямої $x = 0$: вісь Oy — це *вертикальна асимптота*.

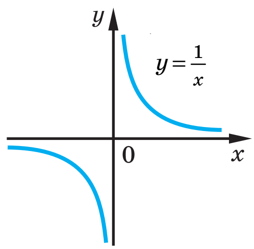


Рис. 75

Якщо розглянути функцію $y = x + \frac{1}{x}$, то при $x \to \infty$ вираз $\frac{1}{x} \to 0$. Через це графік функції $y = x + \frac{1}{x}$ при $x \to \infty$ наближається до прямої $y = x$. Тому ця пряма буде *похилою асимптотою* графіка функції $y = x + \frac{1}{x}$ (рис. 76) (також графік цієї функції має ще й вертикальну асимптоту $x = 0$).

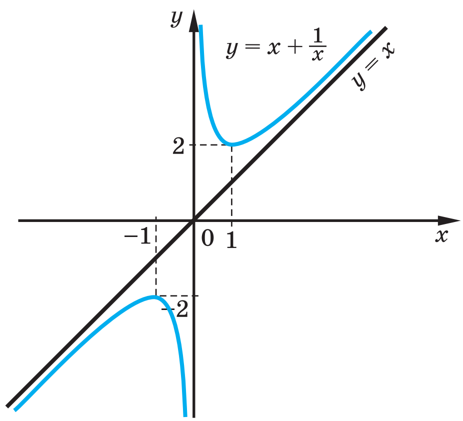


Рис. 76

2. Вертикальні асимптоти. Якщо пряма $x = a$ — вертикальна асимптота, то за означенням біля точки a крива повинна мати нескінченну вітку, тобто границя заданої функції при $x \to a$ (зліва або справа) повинна дорівнювати нескінченності (∞). Зважаючи на неперервність елементарних функцій, які розглядалися в шкільному курсі математики, такими точками можуть бути тільки точки, що обмежують відкриті (або напіввідкриті) проміжки області визначення заданої функції.

Наприклад, у функції $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ область визначення ($x \neq 1$) має розрив у точці $x = 1$ (область визначення: $(-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$ і точка 1 обмежує відкриті проміжки області визначення). Тому пряма $x = 1$ «підозріла» на вертикальну асимптоту. Для того щоб переконатися, що ця пряма дійсно є асимптотою графіка функції, необхідно переконатися, що біля точки 1 (зліва або справа) функція буде прямувати до нескінченності. Для цього розглянемо

$$\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=\left(\frac{1}{+0}\right)=+\infty. \text{ Аналогічно } \lim_{x\to 1-0} f(x)=\left(\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

Таким чином, пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою, оскільки при прямуванні функції на нескінченність її графік необмежено наближається до прямої $x = 1$ (рис. 77).

Відзначимо, що не завжди в точці розриву області визначення функція буде мати вертикальну асимптоту. Наприклад, функція $f(x)=\frac{x^2}{x}$ має область визначення $x \neq 0$. Тому пряма $x = 0$ «підозріла» на вертикальну асимптоту. Але $\lim_{x\to -0} f(x)=\lim_{x\to -0}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to -0} x=0$. Аналогічно $\lim_{x\to +0} f(x)=0$. Отже, біля прямої $x = 0$ функція $f(x)$ не прямує до нескінченності, і тому пряма $x = 0$ не є асимптотою графіка заданої функції (рис. 78).

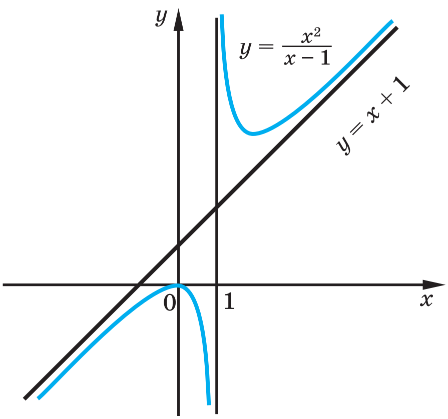


Рис. 77

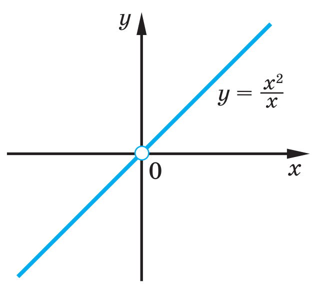


Рис. 78

3. Похилі та горизонтальні асимптоти. Досить просто похилі та горизонтальні асимптоти знаходяться для графіків дробово-раціональних функцій, у яких степінь чисельника на одиницю більший за степінь знаменника (або дорівнює степеню знаменника). Для цього достатньо виділити цілу частину заданого дробу і використати означення асимптоти.

Наприклад, ще раз розглянемо функцію $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Виділимо цілу частину: $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$.

При $x \to \infty$ вираз $\frac{1}{x-1}\to 0$, тобто графік нашої функції буде необмежено наближатися до прямої $y = x + 1$ при $x \to \infty$. А це означає, що похилою асимптотою графіка заданої функції* буде пряма $y = x + 1$ (див. рис. 77).

Розглянемо, як знаходяться *похилі та горизонтальні асимптоти в загальному випадку*.

Нехай похилою (або горизонтальною) асимптотою графіка функції $y = f(x)$ є пряма $\boldsymbol{y = kx + b}$. За означенням асимптоти при $x \to \infty$ графік функції $f(x)$ необмежено наближається до прямої $y = kx + b$. Іншими словами, при $x \to \infty$ з будь-якою точністю буде виконуватися рівність

$$f(x) \approx kx + b. \qquad (1)$$

Ця рівність не порушиться, якщо обидві її частини поділити на $x \neq 0$.

Одержимо: $\frac{f(x)}{x}\approx k+\frac{b}{x}$.

При $x \to \infty$ відношення $\frac{b}{x}\to 0$, тому відношення $\frac{f(x)}{x}\to k$ при $x \to \infty$.

Тобто:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}. \qquad (2)$$

Повертаючись до формули (1), одержуємо, що при $x \to \infty$ $\quad b \approx f(x) - kx$, тобто:

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx). \qquad (3)$$

Одержані формули (2) і (3) дають можливість знаходити похилі та горизонтальні асимптоти для графіка будь-якої функції $y = f(x)$ (звісно, якщо вони існують).

З а у в а ж е н н я. Якщо у графіка функції $f(x)$ є горизонтальна асимптота, то її рівняння буде $y = b$ (тобто в цьому випадку $k = 0$). Але при $k = 0$ з формули (3) одержуємо $b=\lim_{x\to\infty}f(x)$. Отже, *якщо існує число* $b=\lim_{x\to\infty}f(x)$, *то графік функції* $y = f(x)$ *має горизонтальну асимптоту* $y = b$.

---

* Побудова графіків таких функцій розглянута в § 6.

Приклад 1 Користуючись загальними формулами, знайдіть похилу асимптоту графіка функції $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

Розв'язання. ▶ Будемо шукати похилу асимптоту у вигляді $y = kx + b$, де k і b знаходяться за формулами (2) і (3):

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x-1)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{1-0}=1.$$

Асимптотою графіка заданої функції буде пряма $y = kx + b$, тобто пряма $y = x + 1$. ◁

Приклад 2 Знайдіть асимптоти графіка функції $f(x)=\sqrt{x^4+9}-x^2$.

Розв'язання. ▶ Область визначення цієї функції: x — будь-яке дійсне число. Тобто $D(f) = (-\infty; +\infty)$ (або $D(f) = \boldsymbol{R}$). На всій області визначення ця функція неперервна, тому вертикальних асимптот графік цієї функції не має. Будемо шукати похилі та горизонтальні асимптоти у вигляді $y = kx + b$. Тоді

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4+9}-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}=0;$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4+9}-x^2\right)\left(\sqrt{x^4+9}+x^2\right)}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+9-x^4}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{9}{\sqrt{x^4+9}+x^2}=0.$$

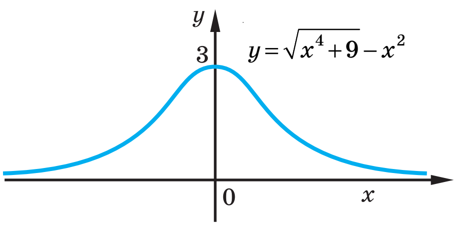


Рис. 79

Тому задана функція має тільки горизонтальну асимптоту $y = 0$ ($y = 0\cdot x + 0$) (рис. 79). ◁

Відзначимо, що іноді графік функції $y = f(x)$ може мати різні асимптоти при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$. Тому при використанні формул (2) і (3) іноді доводиться окремо знаходити значення k і b при $x \to -\infty$ і при $x \to +\infty$.

Запитання для контролю

1. Поясніть зміст поняття асимптота кривої.
2. Наведіть приклади графіків функцій, які мають вертикальні, горизонтальні та похилі асимптоти. Поясніть, чому відповідні прямі є асимптотами.
3. Обґрунтуйте формули для знаходження коефіцієнтів горизонтальних та похилих асимптот ($y = kx + b$) графіка функції $y = f(x)$:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx).$$

Вправи

Знайдіть асимптоти графіків функцій (якщо вони існують) **(1–4)**.

1. 1) $y=\frac{3}{x}$; 2) $y=4-\frac{1}{x-3}$; 3) $y=\frac{x^2-9}{x-3}$; 4) $y=\frac{x+1}{x-1}$.

2. 1) $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$; 2) $f(x)=\frac{x^2}{x-3}$; 3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}$; 4) $f(x)=\frac{x^3+1}{x^2+2}$.

3. 1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x)=\frac{3x^2+5}{x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.

4. 1) $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$; 2) $y=\sqrt{x^2+3x+2}$; 3) $y=\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}$; 4) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+x}}$.

§9 ПОХІДНІ ОБЕРНЕНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ. ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНОЇ

Таблиця 15

1. Формули похідних обернених тригонометричних функцій	
$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1<x<1$
$(\mathrm{arctg}\,x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\,x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Продовж. табл. 15

<table>
<tr><td colspan="2">2. Доведення тотожностей за допомогою похідної</td></tr>
<tr><td colspan="2">Умова сталості функції</td></tr>
<tr><td colspan="2">Функція $f(x)$ є сталою ($f(x) = C$) на інтервалі $(a; b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу (а якщо функція $f(x)$ є також неперервною на відрізку $[a; b]$, то $f(x) = C$ на $[a; b]$).</td></tr>
<tr><td>Схема доведення тотожностей виду $\varphi(x) = g(x)$ за допомогою похідної</td><td>Приклад
Довести, що $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.</td></tr>
<tr><td>1. Розглянути допоміжну функцію $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ (на її області визначення або на заданому інтервалі).
2. Перевірити, що $f'(x) = 0$ на цьому інтервалі.
3. Користуючись умовою сталості функції, зробити висновок, що $f(x) = C$ на розглянутому інтервалі.
4. Щоб знайти сталу C, треба підставити замість x будь-яке значення x_0 з розглянутого інтервалу і довести, що $C = f(x_0) = 0$.
5. Зробити такий висновок: оскільки $f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0$, то $\varphi(x) = g(x)$.</td><td>▶ Розглянемо функцію
$$f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x.$$
Її область визначення $D(f) = [-1; 1]$.
На інтервалі $(-1; 1)$
$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 0 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$
Тоді за умовою сталості функції одержуємо, що $f(x) = C$ при всіх значеннях x з інтервалу $(-1; 1)$, а враховуючи, що функція $f(x)$ неперервна на своїй області визначення, і при всіх значеннях x з відрізка $[-1; 1]$. Щоб знайти значення C, підставимо в рівність $f(x) = C$ замість x, наприклад, значення $x = 0$. Отримуємо:
$$C = f(0) = \arccos 0 - \frac{\pi}{2} + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + 0 = 0.$$
Значить, при всіх значеннях x з відрізка $[-1; 1]$ $f(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2} + \arcsin x = 0.$
Звідси $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. ◁</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Щоб довести **формули похідних обернених тригонометричних функцій,** використаємо означення цих функцій (існування їх похідних приймемо без доведення.

● Наприклад, якщо $y = \arcsin x$, то за означенням арксинуса $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin y = x$. Продиференціюємо обидві частини цієї рівності, розглядаючи похідну sin y як похідну складеної функції. Одержуємо $(\sin y)' = x'$, тобто $\cos y \cdot y' = 1$. Звідси $y' = \frac{1}{\cos y}$. Але $\cos y = \pm\sqrt{1-\sin^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Враховуючи, що $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, де $\cos y \geqslant 0$, одержуємо $\cos y = \sqrt{1-x^2}$. Тоді при $-1 < x < 1$ (у цьому випадку $1 - x^2 \neq 0$ і $1 - x^2 > 0$) маємо $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тому при $-1 < x < 1$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогічно якщо $y = \arccos x$, то за означенням арккосинуса $y \in [0; \pi]$ і $\cos y = x$. Продиференціюємо обидві частини цієї рівності, розглядаючи похідну cos y як похідну складеної функції. Одержуємо $(\cos y)' = x'$, тобто $(-\sin y) \cdot y' = 1$. Звідси $y' = -\frac{1}{\sin y}$. Але $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-x^2}$. Враховуючи, що $y \in [0; \pi]$, де $\sin y \geqslant 0$, одержуємо $\sin y = \sqrt{1-x^2}$. Тоді при $-1 < x < 1$ (у цьому випадку $1 - x^2 \neq 0$ і $1 - x^2 > 0$) маємо $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Тому при $-1 < x < 1$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Знайдемо похідну функції $y = \operatorname{arctg} x$. За означенням арктангенса $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg} y = x$. Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{tg} y)' = x'$, тобто $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$. Звідси $y' = \cos^2 y$. Але $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$. Тоді

$$\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, при будь-яких значеннях x

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Аналогічно якщо $y = \operatorname{arcctg} x$, то за означенням арккотангенса $y \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg} y = x$. Після диференціювання останньої рівності одержуємо $(\operatorname{ctg} y)' = x'$, тобто $-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1$. Звідси $y' = -\sin^2 y$. Але $1 + \operatorname{ctg}^2 y = \frac{1}{\sin^2 y}$. Тоді

$$\sin^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, при будь-яких значеннях x

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

2. Доведення тотожностей за допомогою похідної. У пункті 6.1 підручника розглянуто умову сталості функції: якщо на деякому інтервалі $(a; b)$ $f'(x) = 0$ в усіх точках цього інтервалу, то функція $f(x)$ постійна на цьому інтервалі. Якщо ж нам також відомо, що функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a; b]$, то функція $f(x)$ є постійною і на відрізку $[a; b]$.

Цю умову можна використати для доведення деяких тотожностей.

Приклад 1 Доведіть тотожність $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$, де $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Розглянемо допоміжну функцію $f(x) = 2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1)$ і знайдемо її похідну при $0 < x < 1$:

$$f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{\sqrt{1-(2x^2-1)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{4x}{2x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} = \mathbf{0}.$$

За умовою сталості функції одержуємо, що $f(x) = C$ при всіх значеннях x з інтервалу $(0; 1)$, а враховуючи, що функція $f(x)$ неперервна на своїй області визначення — і при всіх x з відрізка $[0; 1]$. Щоб знайти C, відзначимо, що рівність $f(x) = C$ виконується тотожно, тобто при будь-якому значенні x. Підставляючи в цю рівність $x = 0$, одержуємо

$C = f(0) = 2\arccos 0 - \arccos(-1) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi = 0$. Тому $C = 0$ і, значить, $f(x) = 0$, тобто $2\arccos x - \arccos(2x^2 - 1) = 0$ або $2\arccos x = \arccos(2x^2 - 1)$. ◁

Наведене розв'язання дозволяє виділити таку *схему доведення тотожностей виду $\varphi(x) = g(x)$ за допомогою похідної.*

1. *Розглянути допоміжну функцію $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ (на її області визначення або на заданому інтервалі).*
2. *Перевірити, що $f'(x) = 0$ на цьому інтервалі.*
3. *Користуючись ознакою сталості функції, зробити висновок, що $f(x) = C$ на розглянутому інтервалі (якщо функція $f(x)$ також неперервна на відрізку, що включає кінці розглянутого інтервалу, то $f(x) = C$ на цьому відрізку).*
4. *Щоб знайти C, підставляємо замість x будь-яке значення x_0 з розглянутого проміжку і доводимо, що $C = f(x_0) = 0$.*
5. *Зробити висновок: оскільки $f(x) = \varphi(x) - g(x) = 0$, то $\varphi(x) = g(x)$.*

Приклад використання цієї схеми наведено в пункті 2 таблиці 15 на с. 138.

Запитання для контролю

1. Запишіть формули знаходження похідних обернених тригонометричних функцій: $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.
2. Обґрунтуйте формули знаходження похідних обернених тригонометричних функцій.
3. Поясніть на прикладі схему використання похідної до доведення тотожностей.

Вправи

1. Знайдіть похідні заданих функцій:

1) $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{arctg} x$; 2) $f(x) = \operatorname{arcctg}^2 x$; 3) $f(x) = x^4 \arcsin 2x$;

4) $f(x) = \arcsin 3x + \arccos 4x$; 5) $f(x) = \arcsin(\sin x)$; 6) $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x^3}$.

2. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0, якщо:

1) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$; 2) $f(x) = \arcsin 2x$, $x_0 = \frac{1}{4}$.

3. Доведіть тотожність, використовуючи похідну:

1) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ при $-1 < x < 1$;

3) $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $0 < x \leqslant 1$;

4) $\arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ при $-1 \leqslant x < 0$;

5) $2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$, $-1 < x < 1$; 6) $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$, $x \geqslant 1$;

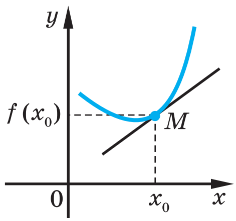
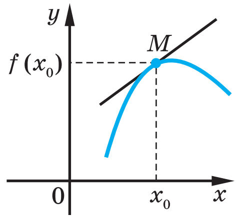
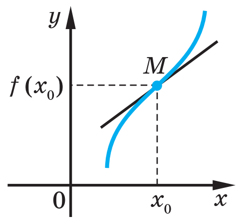
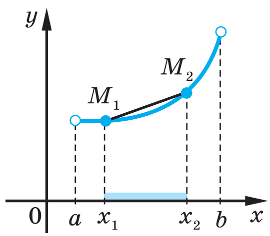
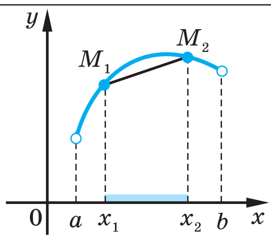
7) $(x + a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$.

§ 10 ДРУГА ПОХІДНА І ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ. ПОНЯТТЯ ОПУКЛОСТІ ФУНКЦІЇ

Таблиця 16

1. Поняття другої похідної		
Поняття	Запис	Приклад
Нехай функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в усіх точках деякого проміжку. Ця похідна, у свою чергу, є функцією аргумента x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *другою похідною* від $f(x)$ і позначають $f''(x)$ (або y'')	$y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = (f'(x))' = (y')'$.	$y = x^5$, $y' = 5x^4$, $y'' = (5x^4)' = 20x^3$.

Продовж. табл. 16

<table>
<tr><td colspan="2">2. Поняття опуклості і точок перегину диференційовної на інтервалі $(a; b)$ функції</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Функція $f(x)$ називається опуклою вниз на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ графік функції лежить вище дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Функція $f(x)$ називається опуклою вгору на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ графік функції лежить нижче дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Точка M графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична і при переході через яку крива змінює напрям опуклості, називається точкою перегину графіка функції. У точці перегину графік функції переходить з одного боку дотичної до іншого.
Абсцису x_0 точки M перегину графіка функції $f(x)$ називають точкою перегину функції $f(x)$. Точка x_0 розділяє інтервали опуклості функції.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Властивість графіків опуклих функцій</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Якщо функція $f(x)$ опукла вниз на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі, то на інтервалі $(x_1; x_2)$ графік функції $y = f(x)$ лежить нижче відрізка M_1M_2, тобто графік лежить нижче хорди.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Якщо функція $f(x)$ опукла вгору на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі, то на інтервалі $(x_1; x_2)$ графік функції $y = f(x)$ лежить вище відрізка M_1M_2, тобто графік лежить вище хорди.</td></tr>
</table>

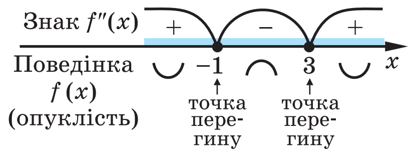
Продовж. табл. 16

4. Достатні умови опуклості функції, що має другу похідну на заданому інтервалі $(a; b)$	
Умова опуклості вниз	Умова опуклості вгору
Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має додатну другу похідну (тобто $f''(x) > 0$ при всіх $x \in (a; b)$), то її **графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вниз.**	Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має від'ємну другу похідну (тобто $f''(x) < 0$ при всіх $x \in (a; b)$), то її **графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вгору.**

5. Знаходження точок перегину функції, що має другу похідну на заданому інтервалі	
Необхідна умова	Достатня умова
У точках перегину функції $f(x)$ її друга похідна дорівнює нулю або не існує.	Нехай функція $f(x)$ має на інтервалі $(a; b)$ другу похідну. Тоді, **якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, де $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегину функції $f(x)$.**
x_0 — точка перегину функції $f(x)$ $\Rightarrow$ **$f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує**	**У точці x_0 знак $f''(x)$ змінюється з «+» на «−» або з «−» на «+»** $\Rightarrow$ **x_0 — точка перегину функції $f(x)$**

6. Дослідження функції $y = f(x)$ на опуклість і точки перегину	
Схема	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Дослідіть функцію $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$ на опуклість і точки перегину. ▶ 1. Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення (як многочлен).
2. Знайти другу похідну.	2. $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$. $f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3)$.
3. Знайти внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує.	3. $f''(x)$ існує і неперервна на всій області визначення функції $f(x)$. $f''(x) = 0$; $12(x^2 - 2x - 3) = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Продовж. табл. 16

4. Позначити одержані точки на області визначення функції, знайти знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.	4. 
5. Записати потрібний результат дослідження (інтервали і характер опуклості і точки перегину).	5. На інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(3; +\infty)$ графік функції спрямовано опуклістю вниз ($f''(x) > 0$), а на інтервалі $(-1; 3)$ — опуклістю вгору ($f''(x) < 0$). Точки перегину: $x = -1$ і $x = 3$ (у цих точках $f''(x)$ змінює знак). ◁

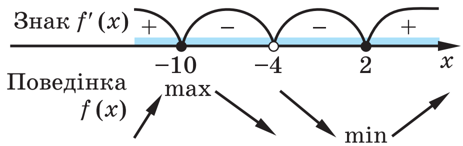
7. Розширена схема дослідження функції для побудови її графіка	
Схема	Приклад
1. Знайти область визначення функції.	Побудуйте графік функції $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$. ▶ 1. Область визначення: $x \neq -4$. (тобто $D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$).
2. З'ясувати, чи є функція парною або непарною (чи періодичною*).	2. Функція $f(x)$ ні парна, ні непарна, оскільки $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$, і не періодична.
3. Точки перетину графіка з осями координат (якщо їх можна знайти).	3. На осі Oy значення $x = 0$, тоді $y = 0$. На осі Ox значення $y = 0$: $\frac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0$, $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$. Тоді $x = 0$, $x = 5$ — абсциси точок перетину графіка з віссю Ox.
4. Похідна і критичні точки функції.	4. $f'(x) = \frac{(2x - 5)(x + 4) - (x^2 - 5x)}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x - 20}{(x + 4)^2}$. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення. $f'(x) = 0$. При $x \neq -4$ маємо $x^2 + 8x - 20 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = -10$ — критичні точки.

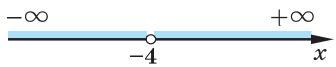
* Найчастіше періодичність встановлюють для тригонометричних функцій.

У розглянутому прикладі функція не може бути періодичною через те, що обмеження області визначення не повторюється.

Продовж. табл. 16

<table>
<tr>
<td>5. Проміжки зростання і спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках).</td>
<td>5. Позначимо критичні точки на області визначення і знайдемо знак похідної та характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення (див. рисунок).



Отже, функція зростає на кожному з проміжків $(-\infty; -10]$ та $[2; +\infty)$ і спадає на проміжках $[-10; -4)$ та $(-4; 2]$. Оскільки в критичній точці (-10) похідна змінює знак з «+» на «−», то $x = -10$ — точка максимуму, а в критичній точці 2 похідна змінює знак з «−» на «+», тому $x = 2$ — точка мінімуму. Отже,
$x_{max} = -10$, тоді $y_{max} = f(-10) = -25$;
$x_{min} = 2$, тоді $y_{min} = f(2) = -1$.</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Поведінка функції на кінцях проміжків області визначення і асимптоти графіка функції (вертикальні, горизонтальні і похилі).</td>
<td>

При $x \to -4$ зліва $f(x) \to \left(\frac{26}{-0}\right) \to -\infty$, а при $x \to -4$ справа $f(x) \to \left(\frac{26}{+0}\right) \to +\infty$ (тобто $\lim\limits_{x \to -4-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -4+0} f(x) = +\infty$). Отже, пряма $x = -4$ — вертикальна асимптота.
Оскільки
$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+4} = \frac{x(x+4) - 9(x+4) + 36}{x+4} = x - 9 + \frac{36}{x+4},$$
то при $x \to \infty$ $\frac{36}{x+4} \to 0$, тоді $f(x) \to x - 9$, тобто пряма $y = x - 9$ — похила асимптота.</td>
</tr>
</table>

Продовж. табл. 16

<table>
<tr>
<td>

7. Друга похідна і дослідження функції на опуклість і точки перегину (і значення функції в цих точках).

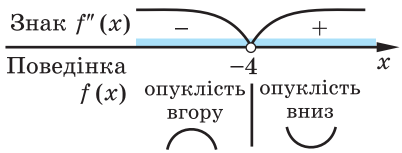
</td>
<td>

$$f''(x) = (f'(x))' =$$

$$= \frac{(2x+8)(x+4)^2 - 2(x+4)(x^2+8x-20)}{(x+4)^4} =$$

$$= \frac{72}{(x+4)^3}.$$

Оскільки $f''(x) \neq 0$, то знак другої похідної може змінитися лише в точці $x = -4$. Одержуємо такі знаки другої похідної і відповідний характер опуклості (див. рисунок).



</td>
</tr>
<tr>
<td>

8. Знайти координати додаткових точок графіка функції (якщо необхідно уточнити його поведінку).

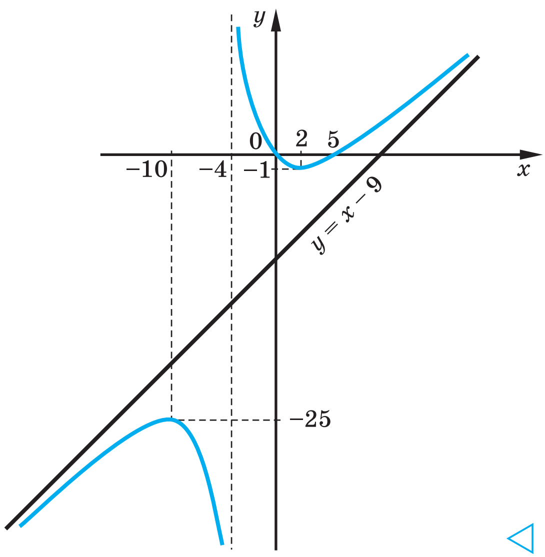
</td>
<td>

x	–7	–2
y	–28	7

</td>
</tr>
<tr>
<td>

9. На основі проведеного дослідження побудувати графік функції.

</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Друга похідна і похідні вищих порядків. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x)$ в усіх точках деякого проміжку, то цю похідну можна розглядати як функцію від аргумента x. Якщо функція $f'(x)$ є диференційовною, то її похідну називають *другою похідною* від $f(x)$ і позначають $f''(x)$ (або y'').

Наприклад, якщо $f(x) = 2x - \sin x$, то

$$f'(x) = (2x - \sin x)' = 2 - \cos x, \text{ тоді } f''(x) = (2 - \cos x)' = \sin x.$$

По аналогії з другою похідною означають і похідні вищих порядків. Похідну від другої похідної функції $f(x)$ називають *третьою похідною* або *похідною третього порядку* цієї функції і т. д. Тобто: *похідною n-го порядку функції $f(x)$ називають похідну від похідної $(n-1)$-го порядку цієї функції*. Похідну n-го порядку функції $f(x)$ позначають $f^{(n)}(x)$.

Наприклад, якщо $f(x) = x^5$, то $f'(x) = (x^5)' = 5x^4$; $f''(x) = (5x^4)' = 20x^3$;

$$f'''(x) = (20x^3)' = 60x^2;\ f^{(4)}(x) = (60x^2)' = 120x;\ f^{(5)}(x) = (120x)' = 120;\ f^{(6)}(x) = (120)' = 0^*.$$

2. Опуклість функції. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a; b)$, а в точці $x_0 \in (a; b)$ має скінченну похідну. Тоді до графіка цієї функції в точці $M(x_0; f(x_0))$ можна провести дотичну. У залежності від розміщення графіка функції відносно дотичної функцію називають *опуклою вниз*, якщо графік розміщено вище дотичної (рис. 80) або *опуклою вгору*, якщо графік розміщено нижче дотичної (рис. 81). Відповідно і сам графік у першому випадку називають *опуклим вниз*, а в другому — *опуклим вгору*. Наведемо відповідні означення та властивості для функції $f(x)$, визначеної і диференційовної двічі на інтервалі $(a; b)$.

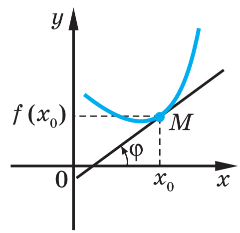


Рис. 80

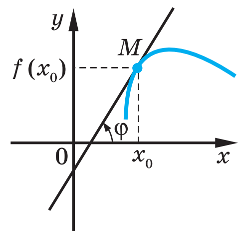


Рис. 81

Функція $f(x)$ називається *опуклою вниз* на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ графік функції лежить вище дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.

Функція $f(x)$ називається *опуклою вгору* на інтервалі $(a; b)$, якщо для будь-якої точки x_0 із цього інтервалу при всіх $x \in (a; b)$ і $x \neq x_0$ графік функції лежить нижче дотичної до цього графіка в точці $(x_0; f(x_0))$.

Зазначимо, що на інтервалі, де функція $f(x)$ опукла вниз, її похідна $f'(x)$ зростає. Дійсно, як видно

---

* Четверту, п'яту і шосту похідні функції $f(x)$ часто ще позначають відповідно так: $f^{\text{IV}}(x)$, $f^{\text{V}}(x)$, $f^{\text{VI}}(x)$.

з рисунка 80, при зростанні аргументу x величина кута φ, що утворює дотична до графіка функції $f(x)$ з додатним напрямком осі Ox, зростає, набуваючи значень між $-\frac{\pi}{2}$ і $\frac{\pi}{2}$. Але тоді $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ теж зростає.

На інтервалі, де функція $f(x)$ опукла вгору, її похідна $f'(x)$ спадає. Дійсно, як видно з рисунка 81, при зростанні аргументу x величина кута φ, що утворює дотична до графіка функції $f(x)$ з додатним напрямком осі Ox, спадає, набуваючи значень між $\frac{\pi}{2}$ і $-\frac{\pi}{2}$. Але тоді $\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$ теж спадає.

Можна довести, що мають місце і обернені твердження.

1. *Якщо похідна* $f'(x)$ *функції* $f(x)$ *зростає на інтервалі* $(a; b)$, *то функція* $f(x)$ *є опуклою вниз на цьому інтервалі.*
2. *Якщо похідна* $f'(x)$ *функції* $f(x)$ *спадає на інтервалі* $(a; b)$, *то функція* $f(x)$ *є опуклою вгору на цьому інтервалі.*

Ці властивості дозволяють сформулювати *достатні умови опуклості функції (і графіка функції)*.

1. **Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має додатну другу похідну (тобто $f''(x) > 0$ при всіх $x \in (a; b)$), то її графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вниз.**
2. **Якщо на інтервалі $(a; b)$ двічі диференційовна функція $f(x)$ має від'ємну другу похідну (тобто $f''(x) < 0$ при всіх $x \in (a; b)$), то її графік на інтервалі $(a; b)$ спрямований опуклістю вгору.**

Дійсно, нехай, наприклад, $f''(x) > 0$ при всіх $x \in (a; b)$. Якщо розглядати $f'(x)$ як функцію від x, то $f''(x)$ є похідною від цієї функції ($f''(x) = (f'(x))'$). Але тоді, маючи додатну похідну, функція $f'(x)$ зростає на інтервалі $(a; b)$. Отже, за властивістю 1 функція $f(x)$ є опуклою вниз на цьому інтервалі, а значить і її графік опуклий вниз на інтервалі $(a; b)$. Аналогічно обґрунтовується і друга достатня умова.

Зауважимо, що ці умови є тільки достатніми, але не є необхідними. Наприклад, функція $y = x^4$ є опуклою вниз на всій числовій прямій (рис. 82), хоча в точці $x = 0$ її друга похідна $y'' = 12x^2$ дорівнює нулю.

Зазначимо, що у випадку, коли функція $f(x)$ *опукла вниз* на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі (рис. 83), то на інтервалі $(x_1; x_2)$, де $a < x_1 < x_2 < b$ графік функції $y = f(x)$ лежить нижче відрізка M_1M_2. Цей відрізок по аналогії з відрізком, що з'єднує дві точки дуги кола, часто називають *хордою* кривої. Отже, у цьому випадку на інтервалі $(x_1; x_2)$ *графік лежить нижче хорди*.

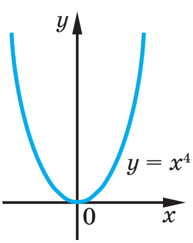


Рис. 82

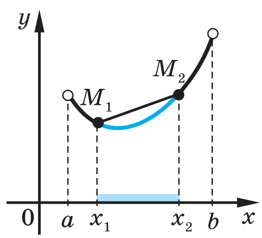


Рис. 83

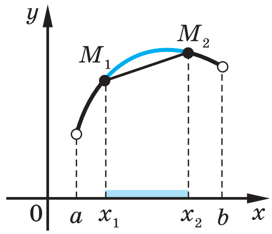


Рис. 84

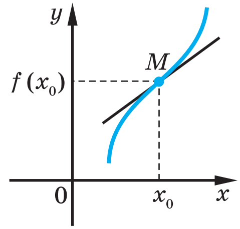


Рис. 85

А якщо функція $f(x)$ *опукла вгору* на інтервалі $(a; b)$ і M_1 та M_2 — точки її графіка на цьому інтервалі (рис. 84), то на інтервалі $(x_1; x_2)$, де $a < x_1 < x_2 < b$, графік функції $y = f(x)$ лежить вище відрізка M_1M_2, тобто *графік лежить вище хорди*.

3. Точки перегину.

Точка M графіка неперервної функції $f(x)$, у якій існує дотична і при переході через яку крива змінює напрям опуклості, називається *точкою перегину* графіка функції.

Враховуючи означення опуклості функції вгору і опуклості функції вниз (с. 147), одержуємо, що дотична до графіка функції з одного боку розміщена вище графіка, а з іншого — нижче, тобто в точці перегину дотична перетинає криву (рис. 85), а сам графік функції переходить з одного боку дотичної до іншого.

Зазначимо, що абсцису x_0 точки перегину графіка функції $f(x)$ називають *точкою перегину функції*. Тоді x_0 є одночасно кінцем інтервалу опуклості вгору і кінцем інтервалу опуклості вниз функції $f(x)$.

Точки перегину двічі диференційовної функції можна знаходити за допомогою її другої похідної. Наведемо *достатню умову існування точки перегину*.

Нехай функція $f(x)$ має на інтервалі $(a; b)$ другу похідну. Тоді, якщо $f''(x)$ змінює знак при переході через x_0, де $x_0 \in (a; b)$, то x_0 — точка перегину функції $f(x)$.

Дійсно, якщо функція $f(x)$ має на інтервалі $(a; b)$ другу похідну, то вона має на цьому інтервалі і першу похідну. Отже, функція $f(x)$ неперервна на заданому інтервалі і існує дотична до графіка функції в точці з абсцисою x_0. Нехай $f''(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) > 0$ при $x > x_0$ (на заданому інтервалі). Тоді, використовуючи достатні умови опуклості функції, одержуємо, що при $x < x_0$ графік функції $f(x)$ спрямований опуклістю вгору, а при $x > x_0$ графік спрямований опуклістю вниз. Таким чином, точка x_0 є точкою перегину функції $f(x)$. Аналогічно розглядається і випадок, коли $f''(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f''(x) < 0$ при $x > x_0$. І в цьому випадку x_0 є точкою перегину функції $f(x)$.

Для знаходження проміжків опуклості функції та точок її перегину слід враховувати наступне.

Нехай функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a; b)$ і в кожній точці цього інтервалу має другу похідну $f''(x)$, яка є неперервною функцією на заданому інтервалі. Якщо для точки x_0 з цього інтервалу $f''(x_0) > 0$, то, враховуючи неперервність функції $f''(x)$, одержуємо, що в деякому δ-околі цієї точки друга похідна теж буде додатною. Тобто для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ значення $f''(x) > 0$. Але тоді в інтервалі $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ функція $f(x)$ спрямована опуклістю вниз і точка x_0 не може бути точкою перегину функції $f(x)$. Аналогічно, якщо $f''(x_0) < 0$, то в деякому околі точки x_0 функція $f(x)$ спрямована опуклістю вгору і точка x_0 не може бути точкою перегину функції $f(x)$. Отже, у розглянутому випадку точкою перегину може бути тільки та точка x_0, у якій друга похідна дорівнює нулю. Одержуємо *необхідну умову існування точок перегину*:

якщо функція $f(x)$ задана на інтервалі $(a; b)$, у кожній точці цього інтервалу має другу похідну $f''(x)$, яка є неперервною функцією на заданому інтервалі і має точку перегину x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Наприклад, функція $y = x^3$ (рис. 86) має перегин у точці 0, у якій її друга похідна дорівнює нулю. Дійсно, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$, $y''(0) = 0$. При $x > 0$ значення $y''(x) > 0$: графік спрямовано опуклістю вниз; а при $x < 0$ значення $y''(x) < 0$: графік спрямовано опуклістю вгору. Отже, 0 — точка перегину функції.

Відзначимо, що *точка перегину функції $f(x)$ може бути і в тій точці x_0, у якій $f''(x_0)$ не існує* (але $f'(x_0)$ існує).

Наприклад, функція $y = x\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 87), означена на всій числовій прямій, має перегин у точці 0, у якій існує її перша похідна $y' = \left(\sqrt[3]{x^5}\right)' = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$ $(y'(0) = 0)$, але не існує друга похідна $y'' = \left(\frac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}\right)' = \frac{5}{3} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}$ ($y''(0)$ не існує).

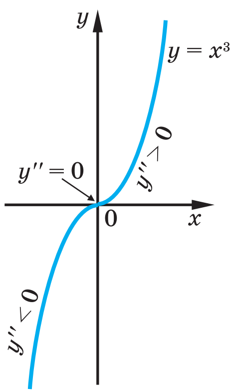


Рис. 86

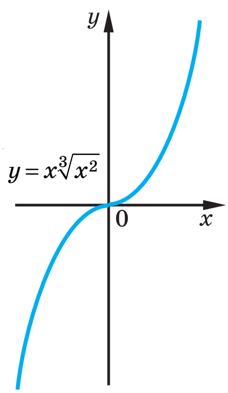


Рис. 87

При $x > 0$ значення $y''(x) > 0$ графік спрямовано опуклістю вниз, а при $x < 0$ значення $y''(x) < 0$ графік спрямовано опуклістю вгору. Отже, 0 — точка перегину функції.

Для знаходження проміжків опуклості функції $f(x)$ потрібно розв'язати нерівності $f''(x) > 0$ і $f''(x) < 0$ на області визначення функції $f(x)$. Оскільки $f''(x)$ теж можна розглядати як функцію від змінної x, то у випадку, коли функція $f''(x)$ є неперервною в кожній точці своєї області визначення, для розв'язування цих нерівностей можна використати метод інтервалів, точніше, його узагальнення, що спирається на властивість: *точки, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, розбивають область визначення функції* $f(x)$ *на проміжки, у кожному з яких* $f''(x)$ *зберігає сталий знак.*

Враховуючи цю властивість та розглянуті умови опуклості функції та існування її точок перегину, можна виділити таку *схему дослідження функції* $f(x)$ *на опуклість та точки перегину.*

1. *Знайти область визначення функції.*
2. *Знайти другу похідну.*
3. *Знайти внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує**.
4. *Позначити одержані точки на області визначення функції, знайти знак другої похідної і характер поведінки функції на кожному з інтервалів, на які розбивається область визначення.*
5. *Записати потрібний результат дослідження (інтервали і характер опуклості і точки перегину).*

Застосування цієї схеми показано в таблиці 16.

Зауважимо, що використання другої похідної дозволяє детальніше дослідити властивості функції для побудови її графіка. У таблиці 16 (с. 144) наведена розширена схема (порівняно із схемою на с. 81) дослідження функції для побудови її графіка та приклад її використання. До цієї схеми додатково включено знаходження інтервалів опуклості функції, точок перегину та асимптот графіка функції (див. також § 8).

Запитання для контролю

1. Використовуючи графік функції, поясніть, яка функція називається опуклою вгору, а яка — опуклою вниз.
2. Використовуючи графік функції, поясніть, яка точка називається точкою перегину графіка функції. Що називають точкою перегину функції?
3. Поясніть, як розміщуються на відповідному інтервалі графіки опуклих вгору та опуклих вниз функцій відносно хорди, що з'єднує дві точки цього графіка.
4. Сформулюйте достатні умови опуклості вгору та опуклості вниз функції, що має другу похідну на заданому інтервалі. Наведіть приклади.
5. Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину функції, що має другу похідну на заданому інтервалі. Наведіть приклади.
6. Охарактеризуйте схему дослідження функції на опуклість та точки перегину.

---

* По аналогії з критичними точками (див. с. 62) ті внутрішні точки області визначення, у яких друга похідна дорівнює нулю або не існує, часто називають критичними точками другого роду, або критичними точками за другою похідною.

7. Охарактеризуйте розширену схему дослідження функції для побудови її графіка.

Вправи

1. Знайдіть другу похідну заданої функції:
   1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$; 2) $f(x) = x^4 \ln x$;
   3) $f(x) = x \cos x$; 4) $f(x) = x^2 \sin x$.
2. Знайдіть інтервали опуклості вгору і опуклості вниз та точки перегину для функції:
   1) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$; 2) $f(x) = \cos 2x$ при $-\pi < x < \pi$;
   3) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$; 4) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
3. Дослідіть функцію за розширеною схемою і побудуйте її графік:
   1) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$; 3) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; 4) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$;
   5) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+3}$; 6) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$; 7) $f(x) = e^{-x^2}$.

§ 11 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ І НЕРІВНОСТЕЙ

11.1. Застосування похідної до розв'язування рівнянь і нерівностей

У підручнику 10 класу було розглянуто можливість використання властивостей функцій до розв'язування деяких рівнянь (див. § 18, 26, 35 підручника 10 класу). Іноді для з'ясування потрібних властивостей функцій доцільно використати похідну. Це перш за все дослідження проміжків зростання і спадання функції та оцінка області значень функції (відповідні прийоми такого дослідження подано в таблиці 17).

Таблиця 17

1. Оцінка значень лівої та правої частин рівняння	
Орієнтир	
$\boxed{f(x) = g(x)}$ $f(x) \geq a$ $g(x) \leq a$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a, \\ g(x) = a \end{cases}$	**Якщо потрібно розв'язати рівняння виду $f(x) = g(x)$ і з'ясувалося, що $f(x) \geq a$, $g(x) \leq a$, то рівність між лівою і правою частинами рівняння можлива лише у випадку, якщо одночасно $f(x)$ і $g(x)$ дорівнюють a.**

Продовж. табл. 17

<table>
<tr><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6.$

▶ Оцінимо значення лівої і правої частин рівняння.

$g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2 \geqslant 2$, $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Дослідимо функцію $f(x)$ на найбільше та найменше значення за допомогою похідної.

$D(f)$: $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ 3-x\geqslant 0, \end{cases}$ тобто $1 \leqslant x \leqslant 3$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Похідна не існує в точках 1 і 3 з області визначення функції $f(x)$, але ці точки не є внутрішніми для $D(f)$, отже, вони не є критичними.

$$f'(x) = 0,\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=0,\ \sqrt{3-x}=\sqrt{x-1},\ 3 - x = x - 1,$$

$x = 2$ — критична точка ($f'(2) = 0$).

Неперервна функція* $f(x)$ задана на відрізку [1; 3], тому вона набуває найбільшого та найменшого значень або на кінцях цього відрізка, або в критичній точці з цього відрізка. Оскільки $f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, а $f(2) = 2$, то $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=2$, тобто** $f(x) \leqslant 2$. Крім того, $g(x) \geqslant 2$, отже, задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2, \\ (x-2)^2+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$

Відповідь: 2. ◁

</td></tr>
<tr><td>2. Використання зростання та спадання функцій</td></tr>
<tr><td>Схема розв'язування рівняння</td></tr>
<tr><td>

1. *Підбираємо один або декілька коренів рівняння.*
2. *Доводимо, що інших коренів це рівняння не має (використовуючи теореми про корені рівняння, або оцінку значень лівої та правої частин рівняння, або таку властивість функцій: зростаюча або спадна функція набуває кожного свого значення тільки в одній точці її області визначення).*

</td></tr>
</table>

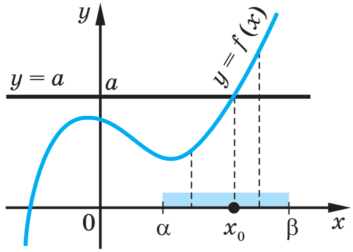
* Звичайно, у точці $x = 1$ функція $f(x)$ неперервна справа, а в точці $x = 3$ — зліва (див. с. 121).

** Ми могли б виконати більш точну оцінку області значень неперервної функції $f(x)$: оскільки $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, то $\sqrt{2}\leqslant f(x)\leqslant 2$, але для наведеного розв'язання достатньо оцінки $f(x) \leqslant 2$.

Продовж. табл. 17

<table>
<tr><th>Теореми про корені рівняння</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>

1. Якщо в рівнянні $f(x) = a$ функція $f(x)$ зростає (спадає) на деякому проміжку, то це рівняння може мати не більше, ніж один корінь на цьому проміжку.



</td><td>

1. Рівняння $2x + \cos x = \pi$ має корінь* $x = \frac{\pi}{2}$

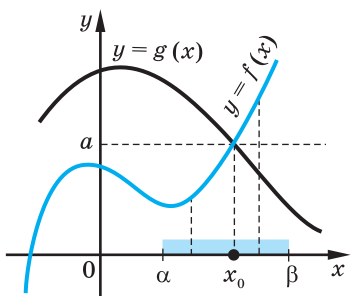
$\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = \pi,\ \text{тобто } \pi = \pi\right).$

Інших коренів це рівняння не має, оскільки функція $f(x) = 2x + \cos x$ зростаюча (її похідна $f'(x) = 2 - \sin x > 0$ при всіх значеннях x з області визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$).

Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

</td></tr>
<tr><td>

2. Якщо в рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому самому проміжку (або навпаки), то це рівняння може мати не більше, ніж один корінь на цьому проміжку.



</td><td>

2. Рівняння $e^x - x = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ має корінь* $x = 0$ $\left(e^0 - 0 = \frac{1}{\sqrt{0}+1},\ \text{тобто } 1 = 1\right).$

Інших коренів це рівняння не має, оскільки його ОДЗ $x \geqslant 0$ і на цій ОДЗ функція $f(x) = e^x - x$ зростаюча (її похідна $f'(x) = e^x - 1$ дорівнює нулю при $x = 0$ і $f'(x) > 0$ при $x > 0$, а, враховуючи неперервність функції $f(x)$, одержуємо, що $f(x)$ зростає при $x \geqslant 0$). Функція

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ спадає при $x \geqslant 0$

$\left(g'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2} < 0 \text{ при } x > 0\right).$

Отже, рівняння $f(x) = g(x)$ має єдиний корінь $x = 0$.

Відповідь: 0.

</td></tr>
</table>

* Корені в прикладах 1 і 2 одержано підбиранням. Як правило, підбір починають із цілих значень: $x = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, які підставляють у задане рівняння, а для тригонометричних рівнянь також перевіряють «табличні» значення: $x = 0,\ \pm\frac{\pi}{6},\ \pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{\pi}{3},\ \pm\frac{\pi}{2},\ \ldots$.

Пояснення й обґрунтування

У таблиці 17 показана можливість застосування похідної для реалізації тих способів розв'язування рівнянь, які пов'язані із застосуванням властивостей функцій і були розглянуті та обґрунтовані в підручнику 10 класу. Нагадаємо, що ці способи найчастіше використовуються в тих випадках, коли ми не в змозі розв'язати задане рівняння за допомогою рівносильних перетворень або рівнянь-наслідків (чи тоді, коли таке розв'язання є дуже громіздким).

Зазначимо, що використання похідної також дозволяє при розв'язуванні деяких рівнянь реалізувати таку схему міркувань.

Припустимо, ми змогли підібрати два корені заданого рівняння виду $f(x) = a$. Щоб довести, що рівняння не має інших коренів, достатньо впевнитися, що функція $f(x)$ має тільки два проміжки зростання чи спадання (на кожному з них рівняння $f(x) = a$ може мати тільки один корінь). Якщо функція $f(x)$ диференційовна на якомусь проміжку, то характер зростання чи спадання функції $f(x)$ на цьому проміжку може змінитися тільки в її критичних точках. Наприклад, якщо в точці x_0 зростання диференційовної (а отже, і неперервної) функції змінилося на спадання, то це означає, що в точці x_0 функція має максимум, але тоді x_0 — критична точка. Таким чином, *для того щоб диференційовна на інтервалі функція мала на цьому інтервалі не більше двох проміжків зростання чи спадання, достатньо, щоб на цьому інтервалі вона мала тільки одну критичну точку*.

Приклад. Розв'яжемо за допомогою вказаної вище схеми рівняння

$$3^{x+2} - 26x = 29.$$

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Задане рівняння має корені $x = -1$ ($3^{-1+2} - 26 \cdot (-1) = 29$, $29 = 29$) та $x = 2$ ($3^{2+2} - 26 \cdot 2 = 29$, $29 = 29$). Доведемо, що інших коренів це рівняння не має. Для цього достатньо довести, що функція $f(x) = 3^{x+2} - 26x$ має не більше двох проміжків зростання чи спадання. Дійсно, $D(f) = \boldsymbol{R}$, $f'(x) = 3^{x+2}\ln 3 - 26$ існує на всій області визначення функції $f(x)$. Якщо $f'(x) = 0$, то $3^{x+2}\ln 3 - 26 = 0$, $3^{x+2}\ln 3 = 26$, $3^{x+2} = \frac{26}{\ln 3} > 0$. Тоді $x = \log_3\left(\frac{26}{\ln 3}\right) - 2 = x_0$ — єдина критична точка функції $f(x)$. Якщо відмітити цю критичну точку на області визначення функції $f(x)$ (на множині $\boldsymbol{R}$), то область визначення розіб'ється на два проміжки, на кожному з яких функція буде або зростати, або спадати (на проміжку $(-\infty; x_0]$ функція $f(x)$ спадає і на проміжку $[x_0; +\infty)$ — зростає). Тоді на кожному з цих проміжків рівняння $f(x) = 29$ може мати не більше, ніж один корінь, тобто всього задане рівняння може мати не більше, ніж два корені. Два корені цього рівняння ми вже підібрали, отже, задане рівняння має тільки ці два корені: $x = -1$ і $x = 2$.

Відповідь: -1, 2. ◁

Аналогічні міркування для випадку, коли для рівняння виду $f(x) = a$ вдається підібрати три корені, наведено далі в прикладі 2 на с. 157.

Відзначимо також, що при розв'язуванні нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$ методом інтервалів описані вище прийоми розв'язування рівнянь з використанням похідної часто доводиться застосовувати для знаходження нулів функції $f(x)$ (див. приклад 5, с. 161).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Розв'яжіть рівняння $3^x + 3^{2-x} = 3 \cdot (1 + \cos 2\pi x)$. (1)

Коментар

Оскільки у нас немає формул, які б дозволяли перетворювати одночасно і показникові, і тригонометричні вирази, то спробуємо розв'язати задане рівняння, використовуючи властивості відповідних функцій, зокрема, спробуємо оцінити область значень функцій, які стоять у лівій і правій частинах рівняння. Для функції, яка стоїть у правій частині рівняння, це легко зробити і без похідної, а для дослідження функції, що стоїть у лівій частині рівняння, зручно використати похідну.

Розв'язання

▶ ОДЗ заданого рівняння — усі дійсні числа $\boldsymbol{R}$. Оцінимо ліву і праву частини рівняння. Оскільки $\cos 2\pi x$ набуває всіх значень від (-1) до 1, то $1 + \cos 2\pi x$ набуває всіх значень від 0 до 2. Тоді функція $g(x) = 3(1 + \cos 2\pi x)$ набуває всіх значень від 0 до 6. Отже, $0 \leqslant g(x) \leqslant 6$.

Функцію $f(x) = 3^x + 3^{2-x}$ дослідимо за допомогою похідної. $D(f) = \boldsymbol{R}$.

$f'(x) = 3^x \ln 3 - 3^{2-x} \ln 3 = 3^{2-x} \ln 3\,(3^{2x-2} - 1)$ існує на всій області визначення функції $f(x)$.

$f'(x) = 0$, $3^{2-x} \ln 3\,(3^{2x-2} - 1) = 0$. Оскільки $3^{2-x} \ln 3 \neq 0$, то $3^{2x-2} - 1 = 0$, $3^{2x-2} = 1$, $2x - 2 = 0$, $x = 1$ — критична точка. Відмічаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знаки похідної в кожному з одержаних проміжків (рис. 88).

Неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ тільки одну критичну точку, і це точка мінімуму (у ній похідна змінює знак з мінуса на плюс). Тоді в цій точці функція набуває свого найменшого значення: $f(1) = 6$. Отже, $f(x) \geqslant 6$.

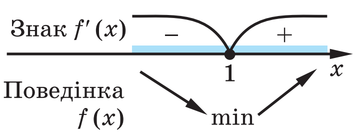


Рис. 88

Враховуючи, що $g(x) \leqslant 6$, одержуємо, що задане рівняння $f(x) = g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = 6, \\ g(x) = 6. \end{cases}$ Але значення 6 функція $f(x)$ набуває тільки при

$x = 1$, що задовольняє і другому рівнянню системи ($g(1) = 3(1 + \cos 2\pi) = 6$). Отже, одержана система (а значить, і задане рівняння) має єдиний розв'язок $x = 1$.

Відповідь: 1. ◁

Зазначимо, що рівняння (1) можна розв'язати ще одним способом, описаним у підручнику 10 класу (див. с. 405) під назвою «Шукай квадратний тричлен», у якому пропонується *розглянути задане рівняння як квадратне відносно якоїсь змінної (чи відносно якоїсь функції)*.

▶ Зокрема, задане рівняння можна записати так: $3^x + \frac{3^2}{3^x} - 3(1 + \cos 2\pi x) = 0$.

Заміна $3^x = t$, де $t > 0$, дає рівняння $t + \frac{9}{t} - 3(1 + \cos 2\pi x) = 0$, яке при $t > 0$ рівносильне рівнянню

$$t^2 - 3(1 + \cos 2\pi x)\, t + 9 = 0. \qquad (2)$$

Якщо рівняння (2) розглянути як квадратне відносно змінної t, то для існування коренів його дискримінант повинен бути невід'ємним. Отже, $D = 9(1 + \cos 2\pi x)^2 - 36 \geqslant 0$. Тоді $(1 + \cos 2\pi x)^2 \geqslant 4$, а, враховуючи, що $1 + \cos 2\pi x \geqslant 0$ завжди, одержуємо $1 + \cos 2\pi x \geqslant 2$, тобто $\cos 2\pi x \geqslant 1$. Але в останній нерівності знак «більше» не може виконуватися (значення косинусу не бувають більші за 1), отже,

$$\cos 2\pi x = 1. \qquad (3)$$

Тоді рівняння (2) перетворюється на рівняння $t^2 - 6t + 9 = 0$, тобто

$$(t-3)^2 = 0,\ t = 3.$$

Обернена заміна дає: $3^x = 3$, отже, $x = 1$, що задовольняє і рівнянню (3).

Відповідь: 1. ◁

Приклад 2 Розв'яжіть рівняння $2^{x+3} + 2^{2x+1} = 7 \cdot 3^x + 3$.

Коментар

Якщо спробувати застосувати до заданого рівняння схему розв'язування показникових рівнянь (див. підручник 10 класу, с. 344), то вдається реалізувати тільки перший її пункт — позбутися числових доданків у показниках степенів. А от звести всі степені до однієї основи (із зручними показниками) чи до двох основ так, щоб одержати однорідне рівняння, чи перенести всі члени в один бік і розкласти одержаний вираз на множники — не вдається. Залишається єдина можливість — застосувати властивості відповідних функцій. Але і на цьому шляху (див., наприклад, підручник 10 класу, табл. 58, с. 403) нам не вдається використати скінченність ОДЗ (вона нескінченна), оцінку лівої і правої частин рівняння (вони обидві в межах від 0 до $+\infty$). Залишається тільки сподіватися на можливість використання монотонності функції. Хоча і тут ми не можемо використати теореми про корені (в обох частинах заданого рівняння стоять зростаючі функції). Тоді *спробуємо підібрати корені цього рівняння і довести, що інших коренів* *воно не має* (зручно попередньо звести рівняння до виду $f(x) = 0$). Послідовно підставляючи $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, з'ясовуємо, що $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(3) = 0$, тобто рівняння $f(x) = 0$ має три корені. Щоб довести, що інших коренів немає, достатньо довести, що у функції $f(x)$ не більше трьох проміжків зростання або спадання; а, враховуючи неперервність $f(x)$ на всій числовій прямій, для цього достатньо довести, що у неї не більше двох критичних точок, тобто рівняння $f'(x) = 0$ має не більше двох коренів. Розглядаючи тепер рівняння $f'(x) = 0$, ми після його перетворення можемо провести аналогічні міркування, але вже для двох коренів (як це було зроблено в прикладі на с. 155). Виконуючи перетворення рівняння $f'(x) = 0$, врахуємо, що всі його члени мають однаковий степінь — x (тобто воно є однорідним відносно трьох функцій від змінної x, а саме: 2^x, 3^x, 4^x). За допомогою ділення обох частин рівняння $f'(x) = 0$ на степінь з основою 2, 3 або 4 вдається зменшити кількість виразів із змінною на один.

Розв'язання

▶ Задане рівняння рівносильне рівнянню $2^x \cdot 2^3 + 2^{2x} \cdot 2^1 - 7 \cdot 3^x - 3 = 0$, тобто

$$8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Позначимо $f(x) = 8 \cdot 2^x + 2 \cdot 4^x - 7 \cdot 3^x - 3$. Оскільки $f(0) = 8 + 2 - 7 - 3 = 0$, $f(1) = 16 + 8 - 21 - 3 = 0$, $f(3) = 64 + 128 - 189 - 3 = 0$, то рівняння $f(x) = 0$ має три корені: 0, 1, 3. Доведемо, що інших коренів у рівняння (1) немає. Для цього достатньо довести, що у функції $f(x)$ є не більше трьох проміжків зростання або спадання, а, враховуючи неперервність функції $f(x)$ на всій числовій прямій, достатньо довести, що функція має не більше двох критичних точок.

Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Похідна $f'(x) = 8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3$ існує при всіх значеннях x. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $f'(x) = 0$. Одержуємо рівняння $8 \cdot 2^x \ln 2 + 2 \cdot 4^x \ln 4 - 7 \cdot 3^x \ln 3 = 0$. Оскільки $3^x \neq 0$, то після ділення обох частин останнього рівняння на 3^x одержуємо рівносильне рівняння

$$8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3 = 0. \qquad (2)$$

Щоб довести, що рівняння (2) має не більше двох коренів, достатньо довести, що функція $\varphi(x) = 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln 2 + 2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln 4 - 7 \ln 3$, яка стоїть у лівій частині рівняння, має не більше двох проміжків зростання чи спадання, а враховуючи неперервність цієї функції на всій числовій прямій, достатньо довести, що вона має тільки одну критичну точку. Дійсно, $\varphi'(x) = (8 \ln 2) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{2}{3} + (2 \ln 4) \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x \cdot \ln \frac{4}{3}$ існує при всіх значеннях x. Отже, критичними точками можуть бути тільки ті значення x, при яких $\varphi'(x) = 0$. Одержуємо однорідне рівняння

$$(8\ln 2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\ln\frac{2}{3}+(4\ln 2)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x\cdot\ln\frac{4}{3}=0.$$

Оскільки $(4\ln 2)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x\neq 0$, то після ділення обох частин рівняння на цей вираз одержуємо рівносильне рівняння $2\ln\frac{2}{3}+2^x\cdot\ln\frac{4}{3}=0$. Звідси $2^x=\frac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}}$. Враховуючи, що $\ln\frac{2}{3}<0$, а $\ln\frac{4}{3}>0$, одержуємо, що $\frac{-2\ln\frac{2}{3}}{\ln\frac{4}{3}}>0$. Отже, останнє рівняння має єдиний корінь. Тоді функція $\varphi(x)$ має єдину критичну точку і тому рівняння (2) має не більше двох коренів. Це означає, що функція $f(x)$ має не більше двох критичних точок. Тоді рівняння (1) (а значить, і задане рівняння) має не більше трьох коренів. Але три корені заданого рівняння ми вже знаємо: 0, 1, 3. Отже, інших коренів задане рівняння не має.

Відповідь: 0, 1, 3. ◁

Приклад 3 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}3x-3y=\sin x-\sin y,\\ 2x^3-y^3=1.\end{cases}$

Розв'язання

▶ Задана система рівносильна системі $\begin{cases}3x-\sin x=3y-\sin y,\\ 2x^3-y^3=1.\end{cases}$ (1)

Розглянемо функцію

$$f(t) = 3t - \sin t.$$

Оскільки $f'(t) = 3 - \cos t > 0$ завжди, то на своїй області визначення ($t \in R$) функція $f(t)$ є зростаючою. Тоді перше рівняння системи (1), яке має вигляд $f(x) = f(y)$, рівносильне рівнянню $x = y$. Отже, система (1) рівносильна системі $\begin{cases}x=y,\\ 2x^3-y^3=1.\end{cases}$

Підставляючи $x = y$ в друге рівняння системи, маємо

$2y^3-y^3=1$, $y^3=1$, $y=1$. Тоді $x=y=1$.

Коментар

Розв'язати задану систему за допомогою рівносильних перетворень не вдається. Тому спробуємо використати властивості функцій.

Якщо в першому рівнянні системи члени із змінною x перенести в один бік, а з y — в інший, то одержимо в лівій і правій частинах рівняння значення однієї і тієї самої функції. За допомогою похідної легко перевірити, що ця функція є зростаючою. Але *рівність $f(x)=f(y)$ для зростаючої функції можлива тоді і тільки тоді, коли* $x = y$, оскільки кожне своє значення зростаюча (чи спадна) функція може набувати тільки при одному значенні аргументу. Коротко цей результат можна

Відповідь: (1; 1). ◁

сформулювати так: **якщо функція $f(x)$ є зростаючою (або спадною) на певній множині, то на цій множині $f(\alpha) = f(\beta) \Leftrightarrow \alpha = \beta$.**

Приклад 4 Розв'яжіть нерівність $x^{11} - x^6 + 2x < -4$.

Р о з в ' я з а н н я

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності $x^{11} - x^6 + 2x + 4 < 0$. Функція $f(x) = x^{11} - x^6 + 2x + 4$ неперервна в кожній точці своєї області визначення, тому для розв'язування нерівності можна використати метод інтервалів.

1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$.
2. Нулі функції: $f(x) = 0$. Знайдемо похідну функції $f(x)$:
   $f'(x) = 11x^{10} - 6x^5 + 2$. Якщо позначити $x^5 = t$, то $f' = 11t^2 - 6t + 2$. Але квадратний тричлен $11t^2 - 6t + 2$ має від'ємний дискримінант, тоді для всіх t $11t^2 - 6t + 2 > 0$. Отже, для всіх x значення $f'(x) > 0$. Тоді функція $f(x)$ зростає на всій числовій прямій і рівняння $f(x) = 0$ може мати тільки один корінь. Оскільки $f(-1) = 0$, то $x = -1$ — єдиний нуль функції $f(x)$.
3. Відмічаємо нулі на ОДЗ і знаходимо знак у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ (рис. 89).

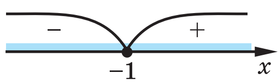


Рис. 89

Відповідь: $(-\infty; -1)$. ◁

К о м е н т а р

Задану нерівність не вдається розв'язати за допомогою рівносильних перетворень, тому використаємо метод інтервалів. Для цього нерівність потрібно привести до виду $f(x) \gtrless 0$, де $f(x)$ — неперервна в кожній точці своєї області визначення функція ($f(x)$ — неперервна функція, оскільки це многочлен).

Нагадаємо схему розв'язування нерівності методом інтервалів.

1. *Знайти ОДЗ нерівності.*
2. *Знайти нулі функції*: $f(x) = 0$.
3. *Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.*
4. *Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.*

Для знаходженні нулів функції потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$, яке не вдається розв'язати за допомогою рівносильних перетворень, тому для його розв'язування доцільно використати властивості функції $f(x)$, зокрема, її монотонність, яку можна обґрунтувати за допомогою похідної.

Приклад 5 Розв'яжіть нерівність $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x} \geqslant 3-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$.

Коментар

Спробуємо розв'язати задану нерівність методом інтервалів (див. схему розв'язування у прикладі 4). Для цього її потрібно звести до виду $f(x) \geqslant 0$ (де функція $f(x)$ — неперервна в кожній точці своєї області визначення).

При знаходженні нулів функції для розв'язування рівняння $f(x) = 0$ доцільно використати властивості відповідних функцій, зокрема, оцінку лівої і правої частин рівняння виду $g(x) = \varphi(x)$. Значення функції $\varphi(x)=3-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ легко оцінити і без застосування похідної, а для дослідження функції $g(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ використаємо похідну. Зазначимо, що в даному випадку всередині ОДЗ ми не знайдемо жодного нуля функції $f(x)$ (див. далі розв'язання: нулем є тільки крайня точка ОДЗ). Але метод інтервалів працює і в цьому випадку — тільки ми отримаємо єдиний інтервал, в якому функція зберігає свій знак.

Розв'язання

▶ Задана нерівність рівносильна нерівності

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \geqslant 0. \qquad (1)$$

Функція $f(x)=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}$ неперервна в кожній точці* своєї області визначення, тому для розв'язування нерівності (1) можна використати метод інтервалів.

1. ОДЗ: $\begin{cases} x-3 \geqslant 0, \\ 5-x \geqslant 0, \\ -1 \leqslant -\frac{x}{4} \leqslant 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x \leqslant 5, \\ -4 \leqslant x \leqslant 4, \end{cases}$ $3 \leqslant x \leqslant 4.$

2. Нулі: $f(x) = 0$. $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}-3+\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}=0.$

Це рівняння рівносильне рівнянню

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=3-\frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi}. \qquad (2)$$

---

* Звичайно, якщо врахувати, що в точці 3 функція $f(x)$ неперервна справа, а в точці 4 — зліва (див. її ОДЗ).

Оцінимо значення функцій $g(x)$ і $\varphi(x)$, які стоять відповідно у лівій і правій частинах рівняння (2).

$$\text{Оскільки } 0 \leqslant \arccos\left(-\frac{x}{4}\right) \leqslant \pi, \text{ то } 0 \leqslant \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \leqslant 1.$$

$$\text{Тоді } 2 \leqslant 3 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{4}\right)}{\pi} \leqslant 3.$$

Дослідимо функцію $g(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{5-x}$ на ОДЗ нерівності (1), тобто при $x \in [3; 4]$.

Функція $g(x)$ неперервна на відрізку [3; 4], тому вона буде набувати найбільшого і найменшого значень або на кінцях, або в критичних точках цього відрізка.

$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}}$ не існує в точці 3 відрізка [3; 4], але ця точка не є внутрішньою точкою цього відрізка, отже, вона не є критичною. З'ясуємо, коли $g'(x) = 0$.

$\frac{1}{2\sqrt{x-3}} - \frac{1}{2\sqrt{5-x}} = 0,$ $\frac{1}{2\sqrt{x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{5-x}},$ $\sqrt{5-x} = \sqrt{x-3},$ $5 - x = x - 3$, $x = 4$.

Порівнюючи значення $g(3) = \sqrt{2}$ і $g(4) = 2$, одержуємо, що $\min\limits_{[3;\,4]} g(x) = g(3) = \sqrt{2},$ $\max\limits_{[3;\,4]} g(x) = g(4) = 2.$ Отже, $\sqrt{2} \leqslant g(x) \leqslant 2.$ Тоді рівняння (2) рівносильне системі $\begin{cases} \varphi(x) = 2, \\ g(x) = 2. \end{cases}$ Оскільки 2 — найбільше значення функції $g(x)$, яке досягається тільки при $x = 4$, то рівняння $g(x) = 2$ має тільки один корінь $x = 4$, який задовольняє і рівнянню $\varphi(x) = 2$ (дійсно, $\varphi(4) = 3 - \frac{\arccos(-1)}{\pi} = 3 - \frac{\pi}{\pi} = 2$). Отже, функція $f(x)$ має тільки один нуль: $x = 4$.

Відмічаємо нуль на ОДЗ і знаходимо знак функції в одержаному проміжку (рис. 90).

Як бачимо, функція $f(x)$ не набуває додатних значень і в нерівності (1) знак «більше» не може виконуватися. Отже, може виконуватися тільки знак «дорівнює», але $f(x) = 0$ тільки при $x = 4$.

Відповідь: 4. ◁

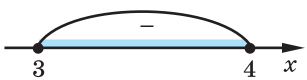


Рис. 90

З а у в а ж е н н я. Використовуючи введені позначення, задану нерівність можна записати так: $g(x) \geqslant \varphi(x)$. Після виконання оцінки значень функцій

$g(x)$ і $\varphi(x)$: $\sqrt{2} \leqslant g(x) \leqslant 2$ та $2 \leqslant \varphi(x) \leqslant 3$ і без методу інтервалів можна зробити висновок, що нерівність $g(x) > \varphi(x)$ не може виконуватися. Отже, задана нерівність рівносильна рівнянню $g(x) = \varphi(x)$, яке рівносильне системі $\begin{cases} \varphi(x) = 2, \\ g(x) = 2, \end{cases}$ що має єдиний розв'язок $x = 4$. Але такі міркування можна провести тільки для цієї конкретної нерівності, у той час як метод інтервалів можна використати для розв'язування довільної нерівності виду $f(x) \gtrless 0$ (де функція $f(x)$ неперервна в кожній точці своєї області визначення). Тому основним способом розв'язування таких нерівностей ми вибрали метод інтервалів.

Запитання для контролю

1. Поясніть, у яких випадках вдається розв'язати рівняння за допомогою оцінки його лівої і правої частин. Наведіть приклад.
2. Поясніть, як можна використати зростання і спадання функцій для розв'язування рівнянь. Наведіть приклади.

Вправи

Розв'яжіть рівняння **(1–7)**.

1. 1) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$; 2) $\sqrt{x-1} + \sqrt{9-x} = x^2 - 10x + 29$.

2. 1) $x + \frac{1}{x} = 2\sin\frac{\pi x}{2}$; 2) $2^x + 2^{-x} = 2\cos\frac{x}{3}$; 3) $4^x + 4^{1-x} = 1 + 3\sin \pi x$.

3. 1) $x^5 - x^3 + 2x - 28 = 0$; 2) $5x - 3\cos x = 3$; 3) $2x^3 - 3x^2 + \sqrt{x-1} = 5$.

4. 1) $\sin 5x - 2\cos x - 8x = x^5 - 2$; 2) $4\cos 3x + 5\sin\frac{x}{2} + 15x = 4 - x^3$;
3) $4^{\frac{1}{x}} - 1 = 3^{2x-1}$.

5. 1) $2^{x+1} - 4x = 0$; 2) $3^{x-1} - 4x = -3$; 3) $5^{x+2} - 12x = 25$.

6. 1) $3 \cdot 2^{x+2} + 5^x = 8 \cdot 3^x + 5$; 2) $3 \cdot 2^x - 3^{x+1} + 4^x = 1$;
3) $3 \cdot 2^{x+4} + 6 \cdot 7^{x+1} = 3 \cdot 5^{x+2} + 15$.

7. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x - \sin x = 4y - \sin y, \\ 3x^2 - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 2y = \sin x - \sin y, \\ x + 2y = 9. \end{cases}$

Розв'яжіть нерівність **(8–9)**.

8. 1) $x^7 - x^4 + 3x > -5$; 2) $2x^9 - x^5 + x > 2$; 3) $\log_2(2 - x) > 4x + 1$.

9. 1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \geqslant \frac{9}{2} - \frac{\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)}{\pi}$; 2) $\sqrt{x-2} + \sqrt{20-x} \geqslant 7 - \frac{\arccos\left(-\frac{x}{11}\right)}{\pi}$.

11.2. Застосування похідної до доведення нерівностей

Похідну інколи вдається використати при доведенні нерівностей від однієї змінної. Розглянемо схему такого доведення на конкретному прикладі.

Приклад Доведіть нерівність $\ln(1+x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$.

Р о з в ' я з а н н я. ▶ Для доведення даної нерівності достатньо довести нерівність $\ln(1+x) - x \leqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Розглянемо функцію $f(x) = \ln(1+x) - x$ при $x \geqslant 0$. Її похідна $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} < 0$ при $x > 0$. Отже, функція $f(x)$ спадає на інтервалі $(0; +\infty)$, а враховуючи неперервність функції $f(x)$ у точці 0 (вона неперервна і на всій області визначення), одержуємо, що функція $f(x)$ спадає і на проміжку $[0; +\infty)$. Але $f(0) = 0$. Тоді при $x \geqslant 0$ значення $f(x) \leqslant f(0) = 0$. Отже, $\ln(1+x) - x \leqslant 0$, тобто $\ln(1+x) \leqslant x$ при $x \geqslant 0$, що й потрібно було довести. (Зазначимо, що при $x > 0$ значення $f(x) < f(0) = 0$, а при $x = 0$ задана нерівність перетворюється на рівність.) ◁

Наведене розв'язання дозволяє виділити таку *схему доведення нерівностей виду $\varphi(x) > g(x)$ (або $\varphi(x) < g(x)$) за допомогою похідної.*

1. *Розглянути допоміжну функцію $f(x) = \varphi(x) - g(x)$ (на її області визначення або на заданому проміжку).*
2. *Дослідити за допомогою похідної поведінку функції $f(x)$* (зростання чи спадання або її найбільше чи найменше значення) *на розглянутому проміжку.*
3. *Обґрунтувати* (спираючись на поведінку функції $f(x)$), *що $f(x) > 0$ (або $f(x) < 0$) на розглянутому проміжку, і зробити висновок, що $\varphi(x) > g(x)$ (або $\varphi(x) < g(x)$) на цьому проміжку.*

Зауважимо, що при доведенні деяких нерівностей цю схему доводиться використовувати декілька разів (див. приклад 1).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Доведіть нерівність $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

К о м е н т а р

Спробуємо використати похідну до доведення заданої нерівності. Для цього дослідимо функцію, яка є різницею лівої і правої частин нерівності:

$$f(x) = \sin x - x + \frac{2x^2}{\pi}.$$

Враховуючи, що ця функція неперервна на всій числовій прямій і $f(0) = 0$, достатньо довести, що на заданому проміжку функція зростає. (Тоді, враховуючи неперервність, вона буде зростати і на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

і на цьому проміжку з нерівності $x > 0$ буде випливати нерівність $f(x) > f(0) = 0$, яка рівносильна заданій.) Для доведення того, що функція зростає на заданому проміжку, достатньо довести, що її похідна $f'(x) > 0$. Якщо тепер позначити похідну $f'(x)$ як нову функцію $g(x) = f'(x)$, то нам потрібно довести нерівність $g(x) > 0$, а для цього знову можна використати наведені вище міркування.

Розв'язання

► Задана нерівність рівносильна нерівності $\sin x - x + \frac{2x^2}{\pi} > 0$. Розглянемо функцію $f(x) = \sin x - x + \frac{2x^2}{\pi}$. Ця функція неперервна на всій числовій прямій і має похідну $f'(x) = \cos x - 1 + \frac{4x}{\pi}$. Тепер розглянемо функцію $g(x) = \cos x - 1 + \frac{4x}{\pi}$ і доведемо, що $g(x) > 0$ на проміжку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Функція $g(x)$ неперервна на всій числовій прямій і має похідну $g'(x) = -\sin x + \frac{4}{\pi}$. Враховуючи, що $\frac{4}{\pi} > 1 \geqslant \sin x$, одержуємо $g'(x) = -\sin x + \frac{4}{\pi} > 0$. Отже, функція $g(x)$ зростає на всій числовій прямій і, зокрема, на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді за означенням зростаючої функції при $x > 0$ одержуємо, що $g(x) > g(0)$. Але $g(0) = \cos 0 - 1 + \frac{4 \cdot 0}{\pi} = 0$. Тобто при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $f'(x) = g(x) > 0$. Це означає, що функція $f(x)$ зростає на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а враховуючи її неперервність, вона зростає також і на проміжку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді з нерівності $x > 0$ буде випливати нерівність $f(x) > f(0)$. Але $f(0) = \sin 0 - 0 + \frac{2 \cdot 0^2}{\pi} = 0$, отже, $f(x) > 0$ при всіх $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Таким чином, на цьому інтервалі виконується нерівність $\sin x - x + \frac{2x^2}{\pi} > 0$, а значить, і нерівність $\sin x > x - \frac{2x^2}{\pi}$. ◁

Приклад 2 Доведіть, що при всіх дійсних значеннях x виконується нерівність $e^x \geqslant 1 + x$.

Розв'язання

► Розглянемо функцію $f(x) = e^x - 1 - x$.

Область визначення: $D(f) = \boldsymbol{R}$. Похідна $f'(x) = e^x - 1$ існує на всій області визначення. Отже, функція

Коментар

Використаємо похідну для доведення заданої нерівності. Для цього дослідимо функцію $f(x)$, яка є різницею лівої і правої частин нерівності.

$f(x)$ неперервна на всій числовій прямій; $f'(x) = 0$, $e^x - 1 = 0$, $e^x = 1$, $x = 0$ — критична точка.

Відмічаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знаки похідної та поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 91).

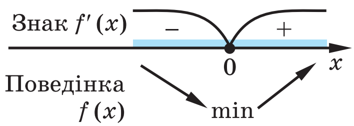


Рис. 91

Як бачимо, неперервна функція $f(x)$ має на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ тільки одну критичну точку, і це точка мінімуму. Отже, у цій точці функція набуває свого найменшого значення на цьому інтервалі. Тоді при усіх дійсних значеннях x значення $f(x) \geqslant f(0) = 0$, тобто $e^x - 1 - x \geqslant 0$. Отже, $e^x \geqslant 1 + x$ при всіх дійсних значеннях x. ◁

Але при всіх дійсних значеннях x ця функція не є ні зростаючою, ні спадною, і тому міркування, наведені при розв'язанні попередніх прикладів, не можна використати. Тоді спробуємо в результаті дослідження знайти найбільше чи найменше значення функції $f(x)$ на всій числовій прямій. Для цього можна використати властивість: *якщо неперервна функція $f(x)$ має на заданому інтервалі тільки одну точку екстремуму x_0 і це точка мінімуму, то на заданому інтервалі функція набуває свого найменшого значення в точці x_0*. Далі користуємося тим, що коли в точці x_0 функція набуває найменшого значення на заданому інтервалі, то для всіх значень x із цього інтервалу $f(x) \geqslant f(x_0)$ (якщо необхідно, то можна також уточнити, що знак рівності досягається тільки в точці x_0).

При доведенні числових нерівностей або для порівняння двох чисел часто буває зручно перейти до більш загальної функціональної нерівності.

Приклад 3 Порівняйте числа π^e і e^π.

Коментар

Щоб скласти план розв'язування, можна міркувати так. Ми не знаємо, яке з заданих чисел більше: π^e чи e^π, тому в процесі аналізу поставимо між ними такий знак «$\vee$». Це знак нерівності, спрямований гострим кінцем униз, що свідчить про те, що ми не знаємо, у який бік його слід направити. Будемо виконувати перетворення нерівності до тих пір, поки не з'ясуємо, яке число більше. Потім знак «$\vee$» замінимо відповідним знаком нерівності: «$>$» або «$<$», який і запишемо в розв'язанні. (У процесі аналізу, якщо на якомусь кроці перетворень потрібно поміняти знак нерівності, то знак «$\vee$» змінюємо на знак «$\wedge$», а в запису розв'язання у відповідному місці змінюємо знак нерівності). В аналізі запис виду $\pi^e \vee e^\pi$ теж будемо називати нерівністю (але, звичайно, не в розв'язанні).

Розглянемо нерівність $\pi^e \vee e^\pi$. Це нерівність із додатними членами ($\pi > 0$ і $e > 0$), отже, обидві її частини можна прологарифмувати. Оскільки функція $\ln t$ є зростаючою, то після логарифмування обох частин за основою e знак нерівності не зміниться, і ми одержимо нерівність $\ln(\pi^e) \vee \ln(e^\pi)$, тобто нерівність $e \ln \pi \vee \pi \ln e$. Оскільки $e\pi > 0$, то після ділення обох частин останньої нерівності на $e\pi$ знак нерівності не зміниться, і ми одержимо нерівність $\frac{\ln \pi}{\pi} \vee \frac{\ln e}{e}$. Помічаємо, що в лівій і правій частинах останньої нерівності стоять значення однієї і тієї самої функції $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Дослідимо цю функцію за допомогою похідної на зростання і спадання. Далі, враховуючи, що $\pi > e$, порівняємо одержані вирази, а потім і задані вирази (виконуючи всі ті самі перетворення, що і в процесі аналізу, тільки у зворотному порядку).

Розв'язання

Розглянемо функцію $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Її область визначення: $x > 0$. Похідна $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ існує на всій області визначення. З'ясуємо, коли $f'(x) = 0$: $\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$. Тоді на області визначення одержуємо рівносильне рівняння $\ln x = 1$, тобто $x = e$ — критична точка. Відмічаємо критичну точку на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знаки похідної та поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 92).

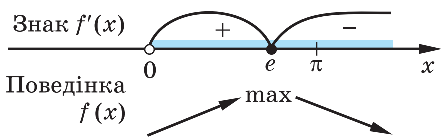


Рис. 92

Отже, в інтервалі $(e; +\infty)$ функція $f(x)$ спадає, а враховуючи її неперервність на всій області визначення, вона також спадає на проміжку $[e; +\infty)$.

Оскільки $\pi > e$, то $f(\pi) < f(e)$, тобто $\frac{\ln \pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}$. Домноживши обидві частини цієї нерівності на додатне число πe (знак нерівності не змінюється), одержуємо нерівність $e \ln \pi < \pi \ln e$. Тоді $\ln(\pi^e) < \ln(e^\pi)$. Оскільки функція $\ln t$ є зростаючою $(e > 1)$, то $\pi^e < e^\pi$.

Відповідь: $\pi^e < e^\pi$. ◁

При доведенні деяких нерівностей інколи вдається використати другу похідну і опуклість відповідних функцій.

Приклад 4 Доведіть, що при всіх $0 < x < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

Розв'язання

Якщо $f(x) = \sin x$, то $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$. При $0 < x < \frac{\pi}{2}$ $f''(x) < 0$, отже, на інтервалі $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ функція

Коментар

На тих інтервалах, де функція $f(x) = \sin x$ опукла вгору, графік функції $f(x)$ лежить вище відповідної хорди (рис. 94, *а*), а на тих інтервалах, де ця функція опукла вниз,

$f(x) = \sin x$ опукла вгору. Тоді на цьому інтервалі її графік лежить вище хорди OA (рис. 93).

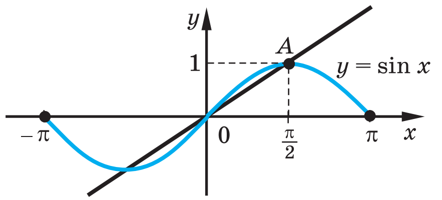


Рис. 93

Пряма OA має рівняння $y = kx$ і проходить через точку $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. Отже, $1 = k \cdot \frac{\pi}{2}$, тобто $k = \frac{2}{\pi}$. Тоді рівняння прямої OA: $y = \frac{2}{\pi}x$. Таким чином, при всіх $0 < x < \frac{\pi}{2}$ виконується нерівність $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. ◁

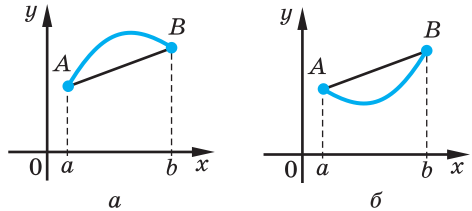


Рис. 94

графік лежить нижче хорди (рис. 94, *б*). Спробуємо використати це при доведенні заданої нерівності: за допомогою другої похідної дослідимо функцію $f(x) = \sin x$ на опуклість, розглянемо рівняння відповідної хорди AB і порівняємо рівняння хорди з рівнянням прямої $y = \frac{2}{\pi}x$ (де $\frac{2}{\pi}x$ — функція з правої частини нерівності).

Запитання для контролю

1. Поясніть, як можна використати похідну до доведення нерівності з однією змінною. Наведіть приклади.

Вправи

Доведіть нерівність (1–4).

1. 1) $x^5 - 2x^3 + 2x > 20$ при $x > 2$; 2) $a^3 + 4 > a^2 + 3a$ при $a \geqslant 0$;
3) $2x + \frac{1}{x^2} > 5$ при $0 < x < \frac{1}{2}$.

2. 1) $e^{-x} > 1 - x$ при $x < 0$; 2) $e^x > ex$ при $x > 1$; 3) $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$ при $x \geqslant 0$.

3. 1) $\operatorname{tg} x > x$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; 2) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$;

4. 1) $\ln(1 + x) \geqslant \frac{x}{x+1}$ при $x > -1$; 2) $2x \ln x \leqslant x^2 - 1$ при $x \geqslant 1$.

5. Порівняйте числа:

1) 1000^{1001} і 1001^{1000}; 2) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{3}}$ і $\left(\sqrt{3}\right)^{\sqrt{2}}$; 3) $(\lg 5)^3$ і $3^{\lg 5}$.

§ 12 ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАВДАНЬ З ПАРАМЕТРАМИ

При розв'язуванні завдань з параметрами похідна може використовуватися для дослідження функцій на монотонність і екстремуми, для дослідження функції та побудови її графіка, для запису рівнянь дотичних до графіків функцій, для знаходження найбільшого і найменшого значень функції.

Приклад 1 Знайдіть всі значення параметра a, при яких функція $y = (a + 2)\,x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$ спадає для усіх $x \in \boldsymbol{R}$.

Розв'язання

▶ Область визначення функції:

$$D\,(y) = \boldsymbol{R}.$$

Функція диференційовна на всій числовій прямій: $y' = 3\,(a + 2)x^2 - 6ax + 9a$. Задана функція буде спадати для усіх $x \in \boldsymbol{R}$, якщо $y' \leqslant 0$ на всій числовій прямій (причому рівняння $y' = 0$ має тільки скінченну множину коренів).

Якщо $a = -2$, то $y' = 12x - 18$ і нерівність $y' \leqslant 0$ не виконується на всій числовій прямій ($12x - 18 \leqslant 0$ тільки при $x \leqslant 1{,}5$).

Якщо $a \neq -2$, то похідна є квадратичною функцією відносно змінної x, яка набуває значень $y' \leqslant 0$ на всій числовій прямій тоді і тільки тоді (див. таблицю в коментарі), коли виконуються умови

$$\begin{cases} a + 2 < 0, \\ D \leqslant 0 \end{cases} \qquad (1)$$

(при цьому рівняння $y' = 0$ може мати хіба що один корінь).

З нерівності $a + 2 < 0$ одержуємо

$$a < -2.$$

З нерівності $D \leqslant 0$ маємо:

$$36a^2 - 4 \cdot 3\,(a + 2) \cdot 9a \leqslant 0,$$
$$36a\,(a - 3a - 6) \leqslant 0,$$
$$36a\,(-2a - 6) \leqslant 0,$$
$$-72a\,(a + 3) \leqslant 0. \qquad (2)$$

Коментар

Використаємо уточнений варіант умови спадання функції (с. 73).

Якщо $f'(x) \leqslant 0$ у кожній точці інтервалу $(a;\, b)$ (причому рівняння $f'(x) = 0$ має лише скінченну множину коренів), то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.

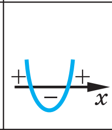
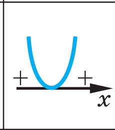
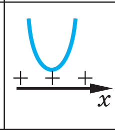
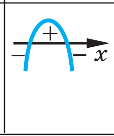
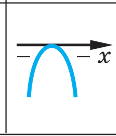
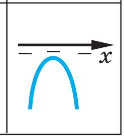
Відзначимо, що ця умова є не тільки достатньою, а й необхідною для диференційовної на інтервалі функції (*якщо на якомусь інтервалі функція $f(x)$ диференційовна і спадає, то $f'(x) \leqslant 0$ на цьому інтервалі* — див. с. 65). Отже, умові задачі можуть задовольняти ті і тільки ті значення параметра, які ми знайдемо за цією умовою.

Аналізуючи похідну заданої функції, враховуємо, що вона є квадратичною функцією тільки у випадку, коли $a + 2 \neq 0$ (тобто $a \neq -2$). Тому випадок $a + 2 = 0$ (тобто $a = -2$) слід розглянути окремо.

Для квадратичної функції згадуємо всі можливі варіанти розміщення параболи відносно осі абсцис (див. таблицю нижче) і з'ясовуємо, коли нерівність $y' \leqslant 0$ виконується для всіх $x \in \boldsymbol{R}$.

Враховуючи одержану умову $a < -2$, отримуємо, що $(-72a) > 0$. Тоді з нерівності (2) маємо $a + 3 \leqslant 0$, тобто $a \leqslant -3$. Отже, система (1) рівносильна системі $\begin{cases} a < -2, \\ a \leqslant -3. \end{cases}$ Звідси одержуємо $a \leqslant -3$.

Відповідь: $(-\infty; -3]$. ◁

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a + 2 > 0$			
$a + 2 < 0$			

Зауважимо, що нерівність $D \leqslant 0$ (при $a \neq -2$), яка звелась до нерівності (2), можна було розв'язувати окремо або методом інтервалів, або за допомогою графіка квадратичної функції (виключаючи точку з абсцисою $a = -2$), а вже потім знаходити спільний розв'язок системи (1).

Приклад 2 Знайдіть найменше значення k, при якому графік функції $y = (k - 1)x^2 + 2kx + 3k - 2$ дотикається до осі абсцис.

Розв'язання

▶ За умовою вісь абсцис (яка має рівняння $y = 0$ і кутовий коефіцієнт 0) повинна бути дотичною до графіка функції

$$y = f(x) = (k - 1)x^2 + 2kx + 3k - 2.$$

Якщо x_0 — абсциса точки дотику, то, враховуючи геометричний зміст похідної, одержуємо $f'(x_0) = 0$. Щоб дотичною була саме вісь абсцис (а не паралельна їй пряма, яка має такий самий кутовий коефіцієнт), достатньо перевірити, що $f(x_0) = 0$.

Оскільки $f'(x) = 2(k - 1)x + 2k$, то $f'(x) = 0$, якщо

$$2(k - 1)x + 2k = 0. \qquad (1)$$

При $k = 1$ рівняння (1) не має розв'язку (одержуємо рівняння $0x + 2 = 0$).

При $k \neq 1$ одержуємо: $(k - 1)x = -k$,

$$x = -\frac{k}{k-1} = x_0. \text{ Тоді}$$

$$f(x_0) = (k-1)\frac{k^2}{(k-1)^2} - \frac{2k^2}{k-1} + 3k - 2 = \frac{2k^2 - 5k + 2}{k-1}.$$

Коментар

Для того щоб графік функції дотикався до осі абсцис, потрібно, щоб вісь абсцис була дотичною до цього графіка. Враховуючи, що ми знаємо рівняння осі абсцис: $y = 0$ (тобто $y = 0x + 0$), задану ситуацію можна дослідити двома способами.

1. Якщо дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має рівняння $y = 0$, то кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює 0. Тоді за геометричним змістом похідної $f'(x_0) = 0$. Але кутовий коефіцієнт 0 має не тільки вісь абсцис, а й всі прямі, які паралельні осі Ox (рис. 95, *а*, *б*). Щоб дотичною була саме вісь абсцис, потрібно, щоб точка дотику M знаходилася на осі Ox (рис. 95, *а*), тобто щоб ордината цієї точки дорівнювала 0, отже, $f(x_0) = 0$.
2. Можна також записати рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0:

З'ясуємо, при яких значеннях k $f(x_0) = 0$. Враховуючи, що $k \neq 1$, одержуємо

$$2k^2 - 5k + 2 = 0,$$
$$k_1 = 2,\ k_2 = 0{,}5.$$

Отже, при цих значеннях k графік функції $f(x)$ дотикається до осі абсцис. Найменше з цих значень $k = 0{,}5$.

Відповідь: 0,5. ◁

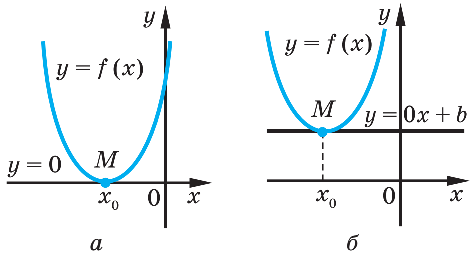


Рис. 95

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ і порівняти одержане рівняння з рівнянням осі абсцис: $y = 0x + 0$ (знову одержимо ті самі умови $f'(x_0) = 0$ і $f(x_0) = 0$). Застосовуючи кожний з указаних способів розв'язування, при дослідженні рівняння $f'(x_0) = 0$ випадок $k = 1$ потрібно розглянути окремо.

Приклад 3 Знайдіть всі значення a, при яких рівняння $\cos 2x + \frac{a}{\sin x} = -7$ має хоча б один корінь.

Розв'язання

▶ ОДЗ: $\sin x \neq 0$. На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням

$$1 - 2\sin^2 x + \frac{a}{\sin x} = -7,$$
$$a = 2\sin^3 x - 8\sin x.$$

Заміна $\sin x = t$ (де $t \in [-1; 1]$ і $t \neq 0$ за ОДЗ) дає рівносильне рівняння

$$2t^3 - 8t = a. \qquad (1)$$

Для заданого рівняння вимога задачі буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли рівняння (1) буде мати хоча б один не нульовий корінь у проміжку $[-1; 1]$. Для цього достатньо забезпечити, щоб число a входило до області значень функції $f(t) = 2t^3 - 8t$ при $t \in [-1; 1]$ і $t \neq 0$. Знайдемо цю область значень. Похідна $f'(t) = 6t^2 - 8$ існує на всій

Коментар

Спочатку почнемо розв'язувати задане рівняння за схемою розв'язування тригонометричних рівнянь (див. підручник 10 класу, с. 170), а саме: *пробуємо звести всі тригонометричні функції* ***до одного аргументу;*** *якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести* ***до однієї функції...*** Указані два етапи можна виконати одночасно, використовуючи формулу

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x.$$

Після заміни $\sin x = t$ для дослідження існування коренів у одержаного кубічного рівняння зручно використати графічну ілюстрацію розв'язків (звівши рівняння до виду $f(t) = a$). Також можна знайти найчисловій прямій, і $f'(t) = 0$ при $6t^2 - 8 = 0$, $t = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (тобто критичні точки не входять до відрізка $[-1; 1]$, оскільки $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$).

Отже, на всьому заданому відрізку $f'(t)$ зберігає свій знак. Оскільки $f'(0) = -8 < 0$, то $f'(t) < 0$ при $t \in [-1; 1]$, тобто функція $f(t)$ спадає на $[-1; 1]$. Тоді її найбільше значення на цьому відрізку дорівнює $f(-1) = 6$, а найменше — $f(1) = -6$.

Враховуючи, що $f(0) = 0$, одержуємо, що при $t \in [-1; 1]$ і $t \neq 0$ неперервна функція $f(t)$ набуває всіх значень з проміжків $[-6; 0)$ і $(0; 6]$. Саме при цих значеннях a і буде виконуватися вимога задачі.

Відповідь: $[-6; 0) \cup (0; 6]$. ◁

більше та найменше значення неперервної функції $f(t)$, заданої на відрізку, або скористатися властивостями функції $f(t)$ на відрізку $[-1; 1]$, дослідженими за допомогою похідної (див. розв'язання). Нагадаємо, що після заміни змінної вимога задачі в задачах з параметрами найчастіше змінюється, тому потрібно з'ясувати нову вимогу для рівняння (1).

Відзначимо, що достатньо наочною є графічна ілюстрація розв'язання (рис. 96), але дослідження функції $f(t)$ для побудови графіка виявляється більш громіздким, ніж у наведеному розв'язанні.

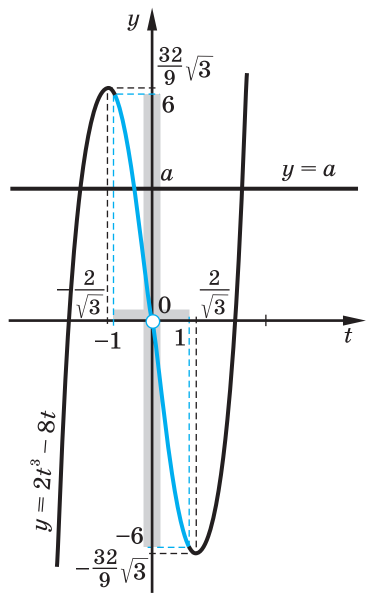


Рис. 96

Приклад 4 При яких від'ємних значеннях a рівняння $\sin^3 x \cos x = a$ має єдиний корінь на інтервалі $(0; \pi)$?

Коментар

Оскільки в умові задачі йдеться про кількість коренів рівняння, то для його дослідження зручно використати графічну ілюстрацію розв'язування. Для цього дослідимо функцію $y = \sin^3 x \cos x$ за допомогою похідної і побудуємо графік цієї функції на інтервалі $(0; \pi)$ та графік функції $y = a$. Кількість точок перетину цих графіків і буде дорівнювати кількості коренів заданого рівняння. При побудові графіка функції $y = \sin^3 x \cos x$ зручно скористатися неперервністю цієї функції на всій числовій прямій і побудувати графік на відрізку $[0; \pi]$, а потім виключити крайні точки. Для визначення критичних точок функції y доводиться розв'язувати рівняння $\sin^2 x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$, з якого одержуємо $\sin^2 x = 0$ або $3\cos^2 x - \sin^2 x = 0$. Останнє рівняння — однорідне — розв'язується діленням на найвищий степінь однієї із змінних. Враховуючи, що випадок $\sin^2 x = 0$ вже розглянуто, зручно обидві частини отриманого однорідного рівняння поділити на $\sin^2 x \neq 0$ (нагадаємо, що при діленні на $\cos^2 x$ випадок $\cos x = 0$ необхідно розглянути окремо).

Р о з в ' я з а н н я

▶ Дослідимо функцію $y = \sin^3 x \cos x$ на інтервалі $(0; \pi)$.

Область визначення функції $y = \sin^3 x \cos x$ — множина всіх дійсних чисел, отже, заданий інтервал повністю входить до області визначення функції.

Знайдемо точки перетину з осями координат. На осі Oy $x = 0$, тоді $y = 0$ (але значення $x = 0$ не входить до заданого проміжку). На осі Ox $y = 0$: $\sin^3 x \cos x = 0$, звідси $\sin x = 0$ або $\cos x = 0$, тобто $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, або $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. До інтервалу $(0; \pi)$ входить лише значення $x = \frac{\pi}{2}$ (а до відрізка $[0; \pi]$ входять також точки $x = 0$ і $x = \pi$, які є нулями функції).

Похідна $y' = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x = \sin^2 x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x)$ існує на всій області визначення функції. Отже, у критичних точках $y' = 0$, тобто

$$\sin^2 x\,(3\cos^2 x - \sin^2 x) = 0. \text{ Тоді}$$

$$\sin^2 x = 0 \qquad (1)$$

або

$$3\cos^2 x - \sin^2 x = 0. \qquad (2)$$

Рівняння (1) має корені $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, що не входять до інтервалу $(0; \pi)$.

Якщо $\sin x \neq 0$, то, поділивши обидві частини однорідного рівняння (2) на $\sin^2 x \neq 0$, одержимо рівносильне йому рівняння $3\operatorname{ctg}^2 x - 1 = 0$. Звідси $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ або $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тоді $x = \frac{\pi}{3} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$, або $x = \frac{2\pi}{3} + \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$. До інтервалу $(0; \pi)$ з множини коренів, які задає перша формула, входить лише $x = \frac{\pi}{3}$, а з множини коренів, що задає друга формула — лише $x = \frac{2\pi}{3}$.

Відмічаємо ці критичні точки на інтервалі $(0; \pi)$ і з'ясовуємо поведінку функції в кожному з одержаних проміжків (рис. 97).

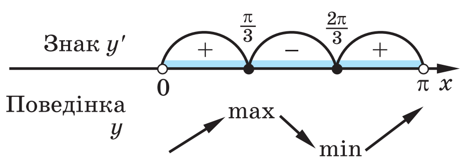


Рис. 97

Знаходимо значення функції в критичних точках $y\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{16}$, $y\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{3}}{16}$ і будуємо графік функції на інтервалі $(0; \pi)$ (рис. 98). На цьому самому рисунку будуємо і графік функції $y = a$ при $a < 0$. Як бачимо, при $a < 0$ рівняння $\sin^3 x \cos x = a$ має єдиний корінь на інтервалі $(0; \pi)$ лише при $a=-\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

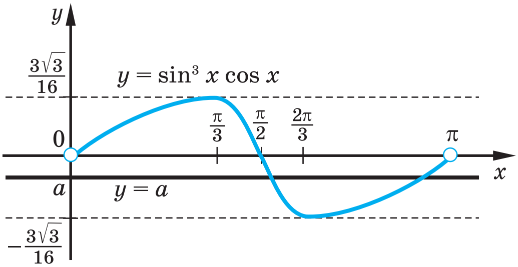


Рис. 98

Відповідь: $-\frac{3\sqrt{3}}{16}$. ◁

Вправи

1. Знайдіть всі значення параметра a, при яких функція $y=\frac{a^2-1}{3}x^3-(a-1)x^2+2x+1$ зростає для всіх $x \in \boldsymbol{R}$.

2. При якому значенні a пряма $16x + y - 13 = 0$ є дотичною до графіка функції $y=\frac{a+x^2}{x^2}$?

3. Знайдіть найбільше значення k, при якому графік функції $y = x^2 + 2(k+1)x + 2k^2 + k - 1$ дотикається до осі абсцис.

4. Знаючи, що рівняння $x^3 + 2 = ax$ при $x > 0$ має тільки один корінь, знайдіть цей корінь і відповідне значення a.

5. Графік функції $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ перетинає вісь Ox у точці з абсцисою $x = -2$ і дотикається до осі Ox у точці з абсцисою $x = 7$. Знайдіть точки локального мінімуму цієї функції.

6. Знайдіть значення a і b, при яких пряма $y = 7x - 2$ дотикається до графіка функції $y = ax^2 + bx + 1$ у точці $A(1; 5)$.

7. Знайдіть значення a, при якому дотична до параболи $y = 2x^2 + 3x + 5$ у точці $x_0 = -2$ є дотичною до параболи $y = -x^2 + 4x + a$.

8. Знайдіть всі значення параметра a, при яких функція $f(x)=\frac{3-x^2}{a-2-3x-x^2}$ не є спадною ні на якому відрізку, що належить її області визначення.

9. При яких значеннях параметра a рівняння $x^3+\frac{48}{x}=a$ має хоча б один корінь?

10. Знайдіть всі значення a, при яких рівняння $4\sin^3 x = a + 7\cos 2x$ не має коренів.

11. Знайдіть всі значення a, при яких рівняння $3\cos 2x+\dfrac{2a}{\sin x}=-17$ має хоча б один корінь.

12. Знайдіть всі значення a, при яких рівняння $7-2\cos x=a\,(1+\operatorname{tg}^2 x)$ має хоча б один корінь.

13. Сторони трикутника лежать на осях координат і на дотичній до графіка функції $y=x^2+4x+4$ у точці, абсциса a якої задовольняє умові $1\leqslant a\leqslant 0$. Знайдіть значення a, при якому площа трикутника буде найбільшою.

§13 ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ

Нехай функція $f(x)$ в точці x_0 має похідну $f'(x_0)$.

***Диференціалом функції $f(x)$ в точці x_0* називається добуток похідної $f'(x_0)$ на приріст аргументу Δx у точці x_0.**

Диференціал функції позначається символом $df(x_0)$. Тому

$$df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x. \qquad (1)$$

Розглянемо геометричний зміст диференціалу. На рисунку 99 MB — це дотична в точці M до графіка функції $y=f(x)$, довжина відрізка $MA=\Delta x$. Пригадуючи, що за геометричним змістом похідної $\operatorname{tg}\varphi=f'(x_0)$, з прямокутного трикутника AMB одержуємо $AB=AM\operatorname{tg}\varphi$, тобто $AB=f'(x_0)\,\Delta x$. Тому довжина відрізка AB дорівнює величині диференціалу функції $f(x_0)$ у точці x_0: $AB=df(x_0)$.

Враховуючи, що $AB=BK-AK$, можна сформулювати геометричний зміст поняття диференціалу: $df(x_0)=BK-AK$.

З геометричної точки зору $df(x_0)$ є приростом ординати дотичної, проведеної до графіка функції $y=f(x)$ у точці x_0, якому відповідає приріст аргументу Δx.

При знаходженні диференціалу функції $f(x)$ у будь-якій точці $x\in D(f)$ на основі формули (1) одержимо

$$df(x)=f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (2)$$

Ця рівність справедлива для будь-якої функції. Зокрема, для функції $f(x)=x$ рівність (2) перетворюється на таку: $df(x_0)=1\cdot\Delta x$. Звідси одержуємо, що диференціал аргументу dx дорівнює приросту аргументу Δx: $dx=\Delta x$.

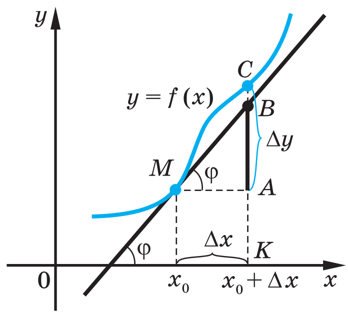


Рис. 99

Підставляючи dx замість Δx в формулу (2), одержуємо

$$df(x) = f'(x)dx. \tag{3}$$

Знайдена рівність є основою для знаходження диференціалу функції.

Приклад 1 Знайдіть $df(x)$ для функції $f(x) = \sin x$.

Розв'язання

▶ Оскільки $f'(x) = \cos x$, то $d(\sin x) = \cos x \cdot dx$. ◁

Рівність (3) також показує, що між поняттям похідної і поняттям диференціалу існує тісний зв'язок. Тому і **правила знаходження диференціалів** аналогічні до правил диференціювання функцій, а саме:

1. $dC = 0$.
2. $d(Cu) = C \cdot du$.
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
4. $d(uv) = (du) \cdot v + (dv) \cdot u$.
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{(du) \cdot v - (dv) \cdot u}{v^2}$.

Обґрунтуємо, наприклад, правило 2:

$$d(Cu) = (Cu)'\,dx = Cu'dx = Cdu.$$

Інші правила обґрунтовуються аналогічно (обґрунтуйте їх самостійно).

Згадаємо, що за означенням похідної $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$. Використовуючи поняття нескінченно малої функції (таблиця 11), цю рівність можна записати так: $\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$, де $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Тоді приріст Δf диференційовної в точці x_0 функції $f(x)$ дорівнює: $\Delta f = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(x) \cdot \Delta x$, де $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

У цій рівності перший доданок правої частини є диференціалом функції, отже,

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \alpha(x) \cdot \Delta x. \tag{4}$$

Враховуючи, що $\alpha(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, одержуємо, що другий доданок при $\Delta x \to 0$ прямує до нуля швидше, ніж Δx. У цьому випадку кажуть, що $\alpha(x) \cdot \Delta x$ є величиною більш високого порядку малості, ніж Δx, тобто другий доданок значно менший за перший доданок. Це дозволяє зробити такий висновок:

диференціал функції $df(x_0)$ є головною частиною приросту функції.

З геометричної точки зору (див. рис. 99) при $\Delta x \to 0$ відстань BC стає значно меншою ніж, відстань $AB = df(x_0)$, тому $AB = df(x_0)$ — головна частина відрізка $AC = \Delta f$.

Якщо в рівності (4) знехтувати другим доданком (який при малих значеннях Δx значно менший за перший доданок), то одержимо наближену рівність $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$, тобто $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x$. Тоді

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \tag{5}$$

Остання рівність використовується для різних наближених обчислень функцій у тих випадках, коли $f(x_0)$ і $f'(x_0)$ неважко обчислити.

Приклад 2 Користуючись формулою (5), знайдіть наближене значення $\sqrt{9,06}$.

Розв'язання

Якщо розглянути функцію $f(x) = \sqrt{x}$, то $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Візьмемо $x_0 = 9$. Тоді $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{9} = 3$ і $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$. За формулою (5) маємо:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot \Delta x.$$

При $\Delta x = 0,06$ і $x_0 = 9$, одержуємо

$$\sqrt{9,06} \approx 3 + \frac{1}{6} \cdot 0,06 = 3,01.$$

Коментар

При обчисленні значення $\sqrt{9,06}$ за формулою (5):

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

природно розглянути функцію $f(x) = \sqrt{x}$ та взяти за x_0 число 9, оскільки 9,06 близьке до 9. Тоді $\Delta x = 0,06$ і значення $f(x_0) = \sqrt{x_0}$ та $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ легко знаходяться при $x_0 = 9$.

Зазначимо, що значення $\sqrt{9,06}$, обчислене на калькуляторі, дорівнює 3,00998...

Вправи

1. Знайдіть диференціал функції:

1) $f(x) = \frac{1}{x}$; 2) $f(x) = \text{tg}\, x$; 3) $f(x) = \arcsin x$;

4) $f(x) = \sin^2 3x$; 5) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} \cdot \text{ctg}\, x$; 6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 1}$.

2. Обчисліть за допомогою формули (5) наближене значення:

1) $\sqrt{4,08}$; 2) $\sqrt{9,06}$; 3) $\sqrt{1,004}$; 4) $\sqrt{25,012}$.

3. Доведіть наближену формулу $(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x$.

4. Обчисліть значення:

1) $1,001^{100}$; 2) $1,03^{200}$; 3) $0,995^6$; 4) $0,998^{20}$.

5. Обчисліть за допомогою формули (5) наближене значення:

1) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 0,03\right)$; 2) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + 0,04\right)$; 3) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - 0,02\right)$; 4) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + 0,05\right)$.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Визначте суму розв'язків рівняння:

1) $|x+5|=7$; 2) $|2x-1|=5$; 3) $|x+7|=2$;
4) $|4x-8|+|2-x|=4$; 5) $2|x-3|-|3-x|=5$; 6) $5|x+4|-2|4-x|=4$.

2. Визначте $x+y$, якщо:

1) $|x-y|+|4-x|=0$; 2) $|2x-y|+2|2-x|=0$.

3. Визначте xy, якщо:

1) $|x-2|+4x^2-4xy+y^2=0$; 2) $|y-1|+x^2-2xy+y^2=0$.

4. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності:

1) $|x-1|\leqslant 2$; 2) $|x+2|\leqslant 4$; 3) $|x-3|\leqslant 6$; 4) $|x+4|<5$.

5. Знайдіть кількість цілих розв'язків нерівності в проміжку $[-5; 5]$:

1) $|x+2|\geqslant 3$; 2) $|x-1|\geqslant 4$; 3) $|x-2|\geqslant 3$; 4) $|2x-1|\geqslant 3$.

6. Визначте найбільший цілий розв'язок нерівності:

1) $|3x-1|<2x+2$; 2) $|2-3x|-x\leqslant 8$; 3) $|7-3x|-2x\leqslant 2$.

7. Визначте найменший цілий розв'язок нерівності:

1) $|1-2x|-x\leqslant 10$; 2) $|3x-2|+2x\leqslant 8$; 3) $|4x-4|+4x\geqslant 5$.

8. Визначте найменший розв'язок нерівності:

1) $|3x+1|\leqslant x+7$; 2) $|2x+3|\leqslant x+12$; 3) $|4x+3|\leqslant x+21$.

9. Знайдіть найбільше значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:

1) $|2x-1|=1-4a$; 2) $|3x+2|=3-4a$.

10. Знайдіть найменше значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:

1) $|2x-1|=4a+1$; 2) $|3x+3|=5a-7$.

11. Знайдіть найбільше ціле значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:

1) $2|x-3|-a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|+a|2-x|=-4$.

12. Знайдіть найменше ціле значення параметра a, при якому рівняння має розв'язок:

1) $8|x-3|+a|3-x|=5$; 2) $3|x-2|-a|2-x|=-6$.

13. Визначте значення параметра m, при якому рівняння має точно чотири розв'язки:

1) $\left|x(|x|-5)\right|=m$; 2) $\left|(x+1)(|x+1|-3)\right|=m$; 3) $\left|2(5-|x|)x\right|=m$.

14. При якому найменшому цілому значенні параметра m рівняння $x^2-|16x-48|=m$ має чотири розв'язки?

15. При якому значенні параметра m рівняння $x^2-|14x-28|=m$ має один розв'язок?

16. До якого числа прямує значення функції, якщо:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $x\to 1$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $x\to 1$;

3) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $x\to 1$; 4) $f(x)=\dfrac{2}{\pi^x-\pi^{-x}}$, $x\to 1$;

5) $f(x)=\cos x+\sin x$, $x\to\dfrac{\pi}{4}$; 6) $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, $x\to\dfrac{\pi}{4}$?

17. Знайдіть границю:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{9x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}}{\sqrt[3]{x^3+2}}$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

18. Знайдіть асимптоти графіка функції:

1) $y=\dfrac{2x^2+x}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-2x+4}$;

3) $y=\ln(3-x^2)$; 4) $y=\log_2(\operatorname{arctg} x)$;

19. Дослідіть на неперервність функцію:

1) $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$; 2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$; 3) $f(x)=\sin x$;

4) $f(x)=\cos x$; 5) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2} \text{ при } |x|\leqslant 1,\\ |x-1| \text{ при } |x|>1;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} \text{ при } x\neq 0,\\ 0 \text{ при } x=0;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, \text{ якщо } x \text{ — раціональне число,}\\ 0, \text{ якщо } x \text{ — ірраціональне число;}\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}3x-2, \text{ якщо } x \text{ — раціональне число,}\\ x^2, \text{ якщо } x \text{ — ірраціональне число.}\end{cases}$

20. Дослідіть на неперервність функцію на зазначеному проміжку:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+5x+6}$, $[-5;\ 0]$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-5x+6}$, $[0;\ 5]$.

21. Знайдіть точки розриву функції:

1) $\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{x+2} \text{ при } x\neq -2,\\ 1 \text{ при } x=-2;\end{cases}$ 2) $y=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^2} \text{ при } x\neq 1,\\ 3 \text{ при } x=1.\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}x^2, \text{ якщо } x \text{ — раціональне число,}\\ -x^2, \text{ якщо } x \text{ — ірраціональне число;}\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, \text{ якщо } x \text{ — нескоротний дріб, } x=\dfrac{m}{n},\ m\in \boldsymbol{Z},\ n\in \boldsymbol{N},\\ 0, \text{ якщо } x \text{ — ірраціональне число.}\end{cases}$

Дослідіть функцію і побудуйте її графік **(22–23)**.

22. 1) $y=\frac{4x}{x^2+1}$; 2) $y=\frac{2x}{x^2+2}$; 3) $y=\frac{x^3-x}{x^2-4}$; 4) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; 5) $y=\frac{x^2-1}{x^2-9}$;

6) $y=\frac{x^2-4}{x^2-25}$; 7) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$; 8) $y=\frac{1}{x^2+5x+6}$.

23. 1) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$; 2) $y=\frac{4}{3}x^3-3x^2-4x$; 3) $y = x^4 - 4x^2 + 4$;

4) $y = x^4 + 6x^2 + 9$; 5) $y=\sqrt{x^2-2x+1}$; 6) $y=\sqrt{x^2+2x+1}$;

7) $y=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; 8) $y=\frac{x^2-1}{|x+1|}$.

24. Розв'яжіть нерівність:

1) $f'(x) < g'(x)$, якщо $f(x)=\frac{x^3+1}{x}$, $g(x)=5x+\frac{1}{x}$;

2) $f'(x) + g'(x) \leqslant 0$, якщо $f(x) = 2x^3 + 12x^2$, $g(x) = 9x^2 + 72x$.

25. Розв'яжіть рівняння:

1) $f'(x)=\frac{2}{x}\cdot f(x)=0$, якщо $f(x) = x^3 \ln x$;

2) $1 + 5f(x) + 6f'(x) = 0$, якщо $f(x)=\frac{1}{1-x}$.

26. Знайдіть область визначення функції і її похідну:

а) $y=\operatorname{arctg}\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$; б) $y=\operatorname{arcctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

27. Знайдіть похідну функції $y(x)$ та обчисліть її значення в точці x_0:

1) $y=\sqrt{\sin\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)}$, $x_0 = 1$; 2) $y=\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{ctg}\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $x_0 = 1$;

3) $y=\frac{\operatorname{arctg} x}{2^x+x^2}$, $x_0 = 1$; 4) $y=\log_{x^2}4+\log_{-x}2$, $x_0 = -e$;

5) $y=\log_x 2+\log_{x^2}(x^2+1)$, $x_0 = e$; 6) $y=\ln^2\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+e^{-x^2}\cdot e^x$, $x_0 = \pi$;

7) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$; 8) $y = (\operatorname{ctg} x)^{\operatorname{tg} x}$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

28. Під яким кутом* перетинається з віссю Oy графік функції:

1) $y=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; 2) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$?

29. 1) На кривій $y = x^2 - 7x + 3$ знайдіть точку, у якій дотична паралельна прямій $y = -5x + 3$.

---

* Мається на увазі кут між віссю Oy і дотичною до графіка функції, проведеною в точці перетину графіка і осі.

2) У яких точках дотичні до кривої $y=\frac{x^3}{3}-x^2-x+1$ паралельні прямій $y = 2x - 1$.

30. 1) Знайдіть точку, у якій дотична до графіка функції $y = x^2$ перпендикулярна до прямої $2x - y + 1 = 0$.

2) Знайдіть на графіку функції $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-\frac{18}{5}x+\frac{14}{5}$ всі такі точки, дотична в кожній із яких до графіка перпендикулярна до прямої $5x - 3y + 2 = 0$.

31. 1) У якій точці кривої $y = ax^2 + bx + c$ потрібно провести дотичну до неї для того, щоб дотична проходила через початок координат? Дослідіть, при яких значеннях a, b і c задача має розв'язок.

2) У якій точці кривої $y = x^2 - 5x + 6$ потрібно провести дотичну, щоб вона проходила через точку $M\ (a;\ b)$? Дослідіть, при яких значеннях a і b задача має розв'язок.

32. 1) Знайдіть кут між дотичними до графіка функції $y = x^3 - x$ у точках з абсцисами -1 і 0.

2) Знайдіть кут між дотичними до графіка функції $y = x^2$, що проходять через точку з координатами $(0; -1)$.

33. 1) З точки $A\ (1;\ 6)$ проведено дотичні до кола $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$. Складіть рівняння цих дотичних.

2) Складіть рівняння дотичних до кривої $y = x^2 - 4x + 3$, що проходять через точку $M\ (2; -5)$.

34. 1) Складіть рівняння дотичних до кривих $y = 2x^2 - 5$ і $y = x^2 - 3x + 5$, що проходять через точки перетину цих кривих.

2) Складіть рівняння дотичних до графіків функцій $y=\sqrt{2x}$ і $y=\frac{x^2}{2}$, проведених через точку перетину цих кривих.

35. 1) При яких значеннях a функція $f\,(x) = x^3 + 3\,(a - 7)\,x^2 + 3\,(a^2 - 9)\,x + 1$ має точку максимуму?

2) При яких значеннях a функція $f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$ має точку мінімуму?

36. 1) Знайдіть найменшу з відстаней від точки M з координатами $(0; -2)$ до точок $(x;\ y)$, таких, що $y=\frac{16}{\sqrt{3x^3}}-2,\ x>0$.

2) Знайдіть відстань від точки $M\ (1; 0)$ до графіка функції $y = x^2 + 6x + 10$ (тобто найменшу з усіх відстаней від точки M до точок графіка).

37. 1) Знайдіть координати точки M, що лежить на графіку функції $y = 1 + \cos x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ і є найменш віддаленою від прямої $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

2) Знайдіть координати точки M, що лежить на графіку функції $y = 1 - \sin x$ при $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ і є найменш віддаленою від прямої $x - \sqrt{2}y - 5 = 0$.

38. 1) Знайдіть відстань між графіками функцій $y = x^2$ і $y = x - 1$ (тобто найменшу з усіх відстаней між точками цих графіків).

2) Знайдіть відстань між графіками функцій $y = -x$ і $y = \frac{1}{x}$.

39. 1) Фігура обмежена параболою $y = x^2 + 1$ і відрізками прямих $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. У якій точці M даної кривої $y = x^2 + 1$, $x \in [1; 2]$, потрібно провести дотичну, щоб вона відтинала від цієї фігури трапецію найбільшої площі?

2) У фігуру, обмежену лініями $y = 3x$ та $y = x^2$, вписано прямокутник найбільшої площі так, що дві його вершини лежать на прямій, а дві інші — на параболі. Знайдіть площу цього прямокутника.

40. 1) Знайдіть всі значення a, при яких функція $f(x) = a \cdot 8^x - (3a - 2) \cdot 4^x + 3(3a - 2) \cdot 2^x$ не має екстремумів.

2) Знайдіть всі значення a, при яких функція $f(x) = a \cdot 8^x + (3a + 1) \cdot 4^x + (9a + 1) \cdot 2^x - 1$ не має екстремумів.

41. 1) Знайдіть число, що в сумі із своїм квадратом дає найменше значення цієї суми.

2) Знайдіть таке додатне число, щоб різниця між ним і його кубом була найбільшою.

42. 1) Серед усіх циліндрів, вписаних у дану кулю, знайдіть той, який має найбільший об'єм.

2) Серед усіх циліндрів, вписаних у дану кулю, знайдіть той, який має найбільшу бічну поверхню.

43. Бічне ребро правильної трикутної піраміди має постійну задану довжину й утворює з площиною основи кут α. При якому значенні α об'єм піраміди є найбільшим?

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

1. З історії диференціального числення. Розділ математики, у якому вивчаються похідні та їх застосування до дослідження функцій, називається *диференціальним численням*. Прирости аргументу Δx і функції Δf, які є різницями, відіграють помітну роль у роботі з похідними. Тому природна поява латинського кореня *differentia* (різниця) у назві *calculis differentialis* нового числення, яка перекладається як *числення різниць*; ця назва з'явилася вже в кінці XVII ст., тобто під час народження нового методу.

Термін «похідна» є буквальним перекладом на українську французького слова *dérivée*, яке ввів у 1797 р. Ж. Л а г р а н ж (1736–1813); він же ввів сучасні позначення y', f'. Така назва відображає зміст поняття: функція $f'(x)$ походить від $f(x)$, є похідною від $f(x)$.

Диференціальне числення створене порівняно недавно, у кінці XVII ст. Тим дивовижніше, що задовго до цього А р х і м е д (бл. 287–212 рр. до н. е.) не тільки розв'язав задачу на побудову дотичної до такої складної кривої, як спіраль (застосовуючи при цьому граничні переходи), а й зміг знайти максимум функції $f(x) = x^2 (a - x)$.

Розвитку основ диференціального числення сприяли роботи математика і юриста П. Ф е р м а (1601–1665), який у 1629 р. запропонував правила знаходження екстремумів многочленів. Слід підкреслити, що фактично, виводячи ці правила, Ферма активно застосовував граничні переходи, маючи найпростішу диференціальну умову максимуму і мінімуму. Розвитку нового числення сприяли також роботи Р. Д е к а р т а (1596–1650), який розробив метод координат і основи аналітичної геометрії.

Систематичне вчення про похідні розвинуто І. Н ь ю т о н о м (1643–1727) і Г. Л е й б н і ц о м (1646–1716), які незалежно один від одного створили теорію диференціального числення. Ньютон виходив в основному із задач механіки (ньютонів аналіз створювався одночасно з ньютоновою класичною механікою), а Лейбніц переважно виходив із геометричних задач. Зокрема, до означення похідної Ньютон прийшов, розв'язуючи задачу про миттєву швидкість, а Лейбніц — розглядаючи геометричну задачу про проведення дотичної до кривої.

У подальшому працями Л. Е й л е р а (1707–1783), О. К о ш і (1789–1857), К. Г а у с с а (1777–1855) та інших математиків диференціальне числення було перетворене в цілісну теорію для дослідження функціональних залежностей.

2. Про поняття дійсного числа. Хоча математичний аналіз виник у кінці XVII ст., проте повне його обґрунтування було дано лише в кінці XIX ст., коли слідом за теорією границь, створеною О. Коші, відразу в декількох формах німецькими математиками Р. Д е д е к і н д о м (1831–1916), К. В е й є р ш т р а с с о м (1815–1897) і Г. К а н т о р о м (1845–1918) була побудована теорія дійсного числа.

Перші уявлення про числа формувалися поступово під впливом практики. З давніх часів числа застосовувались під час лічби і вимірювання величин.

Відповідь на запитання «Скільки елементів містить дана скінченна множина?» завжди виражається або натуральним числом, або числом нуль. Отже, множина

$$\{0; 1; 2; \ldots\}$$

всіх невід'ємних чисел обслуговує всі потреби лічби.

Інакше з вимірюванням величин. Відстань між двома пунктами може дорівнювати 3,5 кілометра, площа кімнати — 16,45 квадратних метра тощо.

Історично додатні дійсні числа з'явились як відношення довжин відрізків.

З відкриттям несумірності діагоналі одиничного квадрата з його стороною стало зрозумілим, що відношення довжин відрізків не завжди можна виразити не тільки натуральним, а й раціональним числом. Щоб числове значення кожного відрізка при фіксованій одиниці вимірювання було визначене, потрібно було ввести нові числа — ірраціональні.

Усі практичні вимірювання величин мають лише наближений характер. Їх результат з потрібною точністю можна виразити за допомогою раціональних дробів або скінченних десяткових дробів. Наприклад, вимірюючи діагоналі квадрата із стороною 1 м з точністю до 1 см, ми виявимо, що її довжина наближено дорівнює 1,41 м. Вимірюючи з точністю до 1 мм, дістанемо, що ця довжина наближено дорівнює 1,414 м.

Проте в математиці часто відхиляються від наближеного характеру практичних вимірювань. Послідовний теоретичний підхід до вимірювання довжин відрізків приводить до необхідності розгляду нескінченних десяткових дробів. (Саме такими дробами є числа $\frac{2}{3}=0{,}666\ldots$, $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$, $\pi = 3{,}14159265\ldots$.)

Відношення довжини будь-якого відрізка до довжини відрізка, прийнятого за одиницю вимірювання, завжди можна виразити числом, поданим у вигляді нескінченного десяткового дробу.

Повна теорія дійсних чисел досить складна і не входить у програму середньої школи. Вона звичайно розглядається в курсах математичного аналізу. Проте з одним із способів її побудови ми ознайомимося в загальних рисах.

1. Покладають:

   а) кожному дійсному числу відповідає (як його запис) нескінченний десятковий дріб:

$$x = a_0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots;$$

   б) кожний нескінченний десятковий дріб є записом дійсного числа. Але при цьому природно вважати десятковий дріб, що закінчується нескінченною послідовністю дев'яток, лише другим записом числа, поданим десятковим дробом, що закінчується нескінченною послідовністю нулів (див. також с. 9): $0{,}9999\ldots = 1{,}0000\ldots$; $12{,}765999\ldots = 12{,}766000\ldots$. Тільки вилучивши з розгляду десяткові дроби з дев'яткою в періоді, дістаємо взаємно однозначну відповідність між множиною дійсних чисел і множиною нескінченних десяткових дробів.

   Число a_0 — це *ціла частина* додатного числа x, а

$$x - a_0 = 0{,}a_1a_2\ldots a_n\ldots \text{ — } \textit{дробова} \text{ частина числа } x.$$

Число $x_n = a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n$ називають *десятковим наближенням x з точністю до 10^{-n} з недостачею,* а число $x'_n = x_n + 10^{-n}$ називають *десятковим наближенням з точністю до 10^{-n} з надлишком* для числа

$$x = a_0{,}a_1a_2 \ldots \ldots a_n \ldots .$$

Якщо число x від'ємне, тобто

$$x = -a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots, \text{ то вважають}$$

$$x'_n = -a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \text{ і } x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

2. Вводять *правило порівняння* двох дійсних чисел. За означенням число x менше від числа y, коли принаймні для одного n виконується нерівність $x_n < y_n$, де x_n і y_n — десяткові наближення з точністю до 10^{-n} з недостачею для чисел x і y. (Ми скористалися тим, що правило порівняння скінченних десяткових дробів уже відоме.)
3. Означають *арифметичні дії* над дійсними числами (при цьому також користуються тим, що ці дії вже означені для скінченних десяткових дробів).

   Сумою двох дійсних чисел x і y (позначається $x + y$) називають таке дійсне число z, що для будь-якого n виконуються нерівності

   $$x_n + y_n < x + y < x'_n + y'_n.$$

   У курсах математичного аналізу доводиться, що таке число існує і воно єдине.

   Аналогічно *добутком* двох невід'ємних чисел x і y називають таке число z (позначають xy), що при будь-якому n виконуються нерівності

   $$x_n y_n < xy < x'_n y'_n.$$

   Таке число існує, і воно єдине.

   Нагадаємо, що приклади виконання таким чином означених дій додавання і множення дійсних чисел було розглянуто в курсі алгебри 8 класу (див. також с. 10).

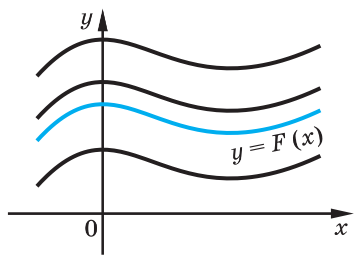
   Скориставшись тим, що добуток невід'ємних чисел $|x|$ і $|y|$ уже означений, для дійсних чисел різних знаків покладають $xy = -|x| \cdot |y|$; а для чисел однакових знаків $xy = |x| \cdot |y|$ (як звичайно, модулем кожного з чисел $a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ і $-a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ називають число $a_0{,}a_1a_2 \ldots a_n \ldots$).

   Віднімання означається як дія, обернена додаванню: *різницею* $x - y$ чисел x і y називається таке число z, що $y + z = x$, а ділення — як дія, обернена множенню: *часткою* $x : y$ називається таке число z, що $yz = x$.
4. Показують, що нерівності і арифметичні операції, означені вище, зберігають основні властивості, притаманні їм у множині раціональних чисел (відповідні властивості для операцій додавання і множення наведено в § 22).

Розділ 2
Інтеграл та його застосування

§ 14 ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Таблиця 18

1. Первісна	
Означення	Приклад
Функція $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x з цього проміжку $F'(x) = f(x)$.	Для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$, оскільки $F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}\right)'=\frac{1}{4}\cdot 4x^3=x^3.$
2. Основна властивість первісної	
Властивість	Геометричний зміст
Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна стала. Приклад Оскільки функція $F(x)=\frac{x^4}{4}$ є первісною для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ (див. вище), то *загальний вигляд усіх первісних для функції* $f(x) = x^3$ можна записати так: $\frac{x^4}{4}+C$, де C — довільна стала.	*Графіки будь-яких первісних для даної функції одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy.* 

Продовж. табл. 18

<table>
<tr><td colspan="2">3. Невизначений інтеграл</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Сукупність усіх первісних для даної функції f (x) називається невизначеним інтегралом і позначається символом $\int f(x)\,dx$, тобто
$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$
де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.</td><td>$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C,$$
оскільки для функції $f(x) = x^3$ на інтервалі $(-\infty;\ +\infty)$ всі первісні можна записати так: $\frac{x^4}{4} + C$ (див. пункт 2 табл. 18).</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)</td></tr>
<tr><td>1. Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F + G$ — первісна для $f + g$.
Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.</td><td>1. $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
Інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.</td></tr>
<tr><td>2. Якщо F — первісна для f і c — стала, то cF — первісна для функції cf.</td><td>2. $\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx,$
де c — стала.
Сталий множник можна виносити за знак інтеграла.</td></tr>
<tr><td>3. Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx + b)$.</td><td>3. $\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$</td></tr>
</table>

5. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)		
Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x) + C$, *де C — довільна стала*	Запис за допомогою невизначеного інтеграла
0	C	$\int 0\cdot dx = C$
1	$x + C$	$\int dx = x + C$
$x^{\alpha}\ (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\ (\alpha \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$

Продовж. табл. 18

$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
e^x	$e^x + C$	$\int e^x dx = e^x + C$
a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття первісної. Основна властивість первісної. У першому розділі ми за заданою функцією знаходили її похідну і застосовували цю операцію диференціювання до розв'язування різноманітних задач. Однією з таких задач було знаходження швидкості і прискорення прямолінійного руху за відомим законом зміни координати $x\ (t)$ матеріальної точки:

$$v\ (t) = x'\ (t), \qquad a\ (t) = v'\ (t) = x''\ (t).$$

Наприклад, якщо в початковий момент часу $t = 0$ швидкість тіла дорівнює нулю, тобто $v\ (0) = 0$, то при вільному падінні тіло на момент часу t пройде шлях

$$s(t) = \frac{gt^2}{2}.$$

Тоді швидкість і прискорення знаходять за допомогою диференціювання:

$$v(t) = s'(t) = \left(\frac{gt^2}{2}\right)' = \frac{g}{2} \cdot 2t = gt, \qquad a\ (t) = v'\ (t) = (gt)' = g.$$

Але важливо вміти не тільки знаходити похідну заданої функції, а й розв'язувати обернену задачу: знаходити функцію $f\ (x)$ за її заданою похідною $f'\ (x)$. Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату $x\ (t)$, знаючи закон зміни швидкості $v\ (t)$, а також визначати швидкість $v\ (t)$, знаючи закон зміни прискорення $a\ (t)$. Знаходження функції $f\ (x)$ за її заданою похідною $f'\ (x)$ називають операцією *інтегрування*.

Таким чином, операція інтегрування обернена до операції диференціювання. Операція інтегрування дозволяє за заданою похідною $f'\ (x)$ знайти (відновити) функцію $f\ (x)$ (латинське слово *integratio* означає «відновлення»).

Наведемо означення понять, пов'язаних із операцією інтегрування.

Функція $F\ (x)$ називається первісною для функції $f\ (x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку $F'\ (x) = f\ (x)$.

Наприклад, для функції $f(x) = 3x^2$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ первісною є функція $F(x) = x^3$, оскільки $F'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

Зазначимо, що функція $x^3 + 5$ має ту саму похідну $(x^3 + 5)' = 3x^2$. Отже, функція $x^3 + 5$ також є первісною для функції $3x^2$ на множині $\boldsymbol{R}$. Зрозуміло, що замість числа 5 можна підставити будь-яке інше число. Тому задача знаходження первісної має безліч розв'язків. Знайти всі ці розв'язки дозволяє *основна властивість первісної*.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C — довільна стала, то функція $F(x) + C$ також є первісною для функції $f(x)$, при цьому будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Вираз $F(x) + C$ називають *загальним виглядом первісних* для функції $f(x)$.

1) За умовою функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на деякому проміжку I. Отже, $F'(x) = f(x)$ для будь-якого x з цього проміжку I. Тоді

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

тобто $F(x) + C$ теж є первісною для функції $f(x)$.

2) Нехай функція $F_1(x)$ — інша первісна для функції $f(x)$ на тому самому проміжку I, тобто $F_1'(x) = f(x)$ для всіх $x \in I$. Тоді

$$(F_1(x) - F(x))' = F'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

За умовою сталості функції (с. 61), якщо похідна функції $F_1(x) - F(x)$ дорівнює нулю на проміжку I, то ця функція набуває деякого сталого значення C на цьому проміжку. Отже, для всіх $x \in I$ функція $F_1(x) - F(x) = C$. Звідси $F_1(x) = F(x) + C$. Таким чином, будь-яка первісна для функції $f(x)$ на даному проміжку може бути записана у вигляді $F(x) + C$, де C — довільна стала.

Наприклад, оскільки для функції $f(x) = 2x$ на інтервалі $(-\infty; +\infty)$ однією з первісних є функція $F(x) = x^2$ (дійсно, $F'(x) = (x^2)' = 2x$), то загальний вигляд усіх первісних функції $f(x) = 2x$ можна записати так: $x^2 + C$, де C — довільна стала.

Зауваження. Для стислості формулювань при знаходженні первісної функції $f(x)$ проміжок, на якому задано функцію $f(x)$, найчастіше не зазначають. При цьому маються на увазі проміжки найбільшої довжини.

Геометрично основна властивість первісної означає, що *графіки будь-яких первісних даної функції $f(x)$ одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy* (рис. 100). Дійсно, графік довільної первісної $F(x) + C$ можна одержати з графіка первісної $F(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі Oy на C одиниць.

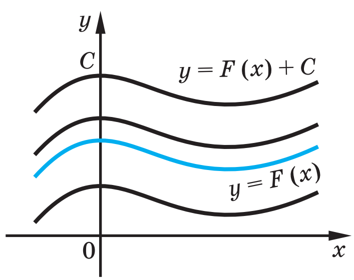


Рис. 100

2. Невизначений інтеграл. Нехай функція $f(x)$ має на деякому проміжку первісну $F(x)$. Тоді за основною властивістю первісної сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на заданому проміжку задається формулою $F(x)+C$, де C — довільна стала.

Сукупність усіх первісних даної функції $f(x)$ називається *невизначеним інтегралом* і позначається символом $\int f(x)\,dx$, тобто

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

де $F(x)$ — одна з первісних для функції $f(x)$, а C — довільна стала.

У наведеній рівності знак $\int$ називається знаком інтеграла, функцію $f(x)$ називають підінтегральною функцією, вираз $f(x)\,dx$ — підінтегральним виразом, змінну x — змінною інтегрування і доданок C — сталою інтегрування.

Наприклад, як відмічалося вище, загальний вигляд первісних для функції $f(x)=2x$ записується так: x^2+C, отже, $\int 2x\,dx = x^2+C$.

3. Правила знаходження первісних (правила інтегрування). Ці правила подібні до відповідних правил диференціювання.

П р а в и л о 1. **Якщо F — первісна для f, а G — первісна для g, то $F+G$ — первісна для $f+g$.**

Первісна для суми дорівнює сумі первісних для доданків.

Дійсно, якщо F — первісна для f (у цьому короткому формулюванні мається на увазі, що функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$), то $F'=f$. Аналогічно, якщо G — первісна для g, то $G'=g$. Тоді за правилом обчислення похідної суми маємо

$$(F+G)' = F'+G' = f+g,$$

а це й означає, що $F+G$ — первісна для $f+g$.

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx,$$

тобто *інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.*

Зазначимо, що правило 1 може бути поширене на будь-яку кількість доданків (оскільки похідна від будь-якої кількості доданків дорівнює сумі похідних доданків).

П р а в и л о 2. **Якщо F — первісна для f і c — стала, то cF — первісна для функції cf.**

Дійсно, якщо F — первісна для f, то $F'=f$. Враховуючи, що сталий множник можна виносити за знак похідної, маємо $(cF)' = cF' = cf$, а це й означає, що cF — первісна для cf.

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx, \text{ де } c \text{ — стала,}$$

тобто *сталий множник можна виносити за знак інтеграла*.

Правило 3. **Якщо F — первісна для f, а k і b — сталі (причому $k \neq 0$), то $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.**

Дійсно, якщо F — первісна для f, то $F' = f$. Враховуючи правило обчислення похідної складеної функції, маємо

$$\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b),$$

а це й означає, що $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первісна для функції $f(kx+b)$.

За допомогою невизначеного інтеграла це правило можна записати так:

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

4. Таблиця первісних (невизначених інтегралів). Для обчислення первісних (чи невизначених інтегралів), крім правил знаходження первісних, корисно пам'ятати табличні значення первісних для деяких функцій, які наведено в пункті 5 таблиці 18. Щоб обґрунтувати правильність заповнення цього пункту таблиці, достатньо перевірити, що похідна від указаної первісної (без сталого доданку C) дорівнює заданій функції. Це буде означати, що розглянута функція дійсно є первісною для заданої функції. Оскільки в запису всіх первісних у другій колонці присутній сталий доданок C, то за основною властивістю первісних можна зробити висновок, що це дійсно загальний вигляд усіх первісних заданої функції. Наведемо обґрунтування формул для знаходження первісних функцій x^{α} та $\frac{1}{x}$, а для інших функцій пропонуємо провести аналогічну перевірку самостійно.

Для всіх x з області визначення функції x^{α} при $\alpha \neq -1$ похідна $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = \frac{1}{\alpha+1}\cdot(\alpha+1)\cdot x^{\alpha} = x^{\alpha}$. Отже, функція $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ при $\alpha \neq -1$ є первісною для функції x^{α}. Тоді за основною властивістю первісних

загальний вигляд усіх первісних для функції x^{α} при $\alpha \neq -1$ буде $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

За допомогою невизначеного інтеграла це твердження записується так:

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C \quad (\alpha \neq -1).$$

У функції $f(x)=\frac{1}{x}$ область визначення $x \neq 0$. Розглянемо функцію $F(x) = \ln|x|$ окремо при $x > 0$ і при $x < 0$.

При $x > 0$ $F(x) = \ln x$. Тоді $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

При $x < 0$ $F(x) = \ln(-x)$. Тоді $F'(x)=(\ln(-x))'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$.

Отже, на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ та $(0; +\infty)$ функція $F(x) = \ln|x|$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{x}$, і тоді

загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)=\frac{1}{x}$ буде $\ln|x| + C$.

За допомогою невизначеного інтеграла це твердження записується так:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Перевірте, що функція $F(x)=2\sqrt{x}$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ на проміжку $(0; +\infty)$.

Розв'язання

$F'(x)=\left(2\sqrt{x}\right)'=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}$, а це й означає, що $F(x)$ є первісною для функції $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

Коментар

За означенням функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Приклад 2 1) Знайдіть одну з первісних для функції $f(x) = x^4$ на R.
2) Знайдіть усі первісні для функції $f(x) = x^4$.
3*) Знайдіть $\int x^4dx$.

Розв'язання

1) Однією з первісних для функції $f(x) = x^4$ на множині R буде функція $F(x)=\frac{x^5}{5}$, оскільки

$$F'(x)=\left(\frac{x^5}{5}\right)'=\frac{1}{5}\cdot 5x^4=x^4.$$

Коментар

1) Первісну для функції $f(x) = x^4$ можна спробувати знайти підбором. При цьому можна міркувати так: щоб після знаходження похідної одержати x^4, потрібно брати похідну від x^5. Але $(x^5)' = 5x^4$. Щоб похідна дорівнювала x^4, достатньо поставити перед функцією x^5 коефіцієнт $\frac{1}{5}$.

Простіше безпосередньо використати формулу з пункту 5 таблиці 17: *однією з первісних для функції* x^{α} *є функція* $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

▶ 2) За основною властивістю первісних усі первісні для функції $f(x) = x^4$ можна записати у вигляді $\frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ◁

2) *Якщо ми знаємо одну первісну* $F(x)$ *для функції* $f(x)$, *то* за основною властивістю первісних *будь-яку первісну для функції* $f(x)$ *можна записати у вигляді* $F(x) + C$, де C — довільна стала.

▶ 3*) $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}+C$, де C — довільна стала. ◁

3) За означенням $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, тобто невизначений інтеграл $\int f(x)\,dx$ — це просто спеціальне позначення загального виду всіх первісних даної функції $f(x)$ (які ми вже знайшли в пункті 2 розв'язання).

Приклад 3 Для функції $f(x)=\sqrt{x}$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M (9; 10).

Розв'язання

▶ $D(f) = [0; +\infty)$. Тоді $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$. Загальний вигляд усіх первісних для функції $f(x)$ такий:

$$\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$$

За умовою графік первісної проходить через точку M (9; 10), отже, при $x = 9$ одержуємо $\frac{2}{3}\cdot 9\sqrt{9}+C=10.$

Звідси $C = -8$. Тоді шукана первісна:

$$\frac{2}{3}x\sqrt{x}-8.$$ ◁

Коментар

Спочатку запишемо загальний вигляд первісних для заданої функції $F(x) + C$. Потім використаємо те, що графік одержаної функції проходить через точку M (9; 10), отже, при $x = 9$ значення функції $F(x) + C$ дорівнює 10. Щоб знайти первісну для функції $f(x)=\sqrt{x}$, врахуємо, що область визначення цієї функції $x \geqslant 0$. Тоді цю функцію можна записати так: $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ і використати формулу знаходження первісної для функції x^{α}, а саме: $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$.

Приклад 4* Знайдіть загальний вигляд первісних для функції

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 2x}+\frac{1}{\sqrt{2-x}}-2\cos 3x.$$

Розв'язання

► Запишемо одну з первісних для кожного з доданків.

Для функції $\frac{1}{\sin^2 2x}$ первісною є функція $-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\, 2x$.

Другий доданок запишемо так: $\frac{1}{\sqrt{2-x}}=(2-x)^{-\frac{1}{2}}$. Тоді первісною цієї функції буде функція:

$$\frac{1}{-1}\cdot\frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=-2\,(2-x)^{\frac{1}{2}}=-2\sqrt{2-x}.$$

Первісною для функції $2\cos 3x$ є функція $2\cdot\frac{1}{3}\sin 3x=\frac{2}{3}\sin 3x$. Тоді загальний вигляд первісних для заданої функції є:

$$-\frac{1}{2}\mathrm{ctg}\, 2x-2\sqrt{2-x}-\frac{2}{3}\sin 3x+C.$$ ◁

Коментар

Використаємо правила знаходження первісних. Спочатку звернемо увагу на те, що задана функція є алгебраїчною сумою трьох доданків. Отже, її первісна дорівнює відповідній алгебраїчній сумі первісних для доданків (правило 1). Потім врахуємо, що всі функції-доданки є складеними функціями від аргументів виду $kx+b$. Отже, за правилом 3 ми повинні перед кожною функцією-первісною (від аргументу $kx+b$), яку ми отримаємо за таблицею первісних, поставити множник $\frac{1}{k}$.

Для кожного з доданків зручно спочатку записати одну з первісних (без сталого доданка C), а потім уже записати загальний вигляд первісних для заданої функції (додати до одержаної функції сталий доданок C).

Для третього доданка також врахуємо, що постійний множник 2 можна поставити перед відповідною первісною (правило 2).

Для першого доданка враховуємо (див. таблицю первісних, с. 188), що первісною для $\frac{1}{\sin^2 x}$ є $(-\mathrm{ctg}\, x)$, для другого — первісною для x^α є $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, для третього — первісною для $\cos x$ є $\sin x$ (звичайно, перетворення другого доданка виконуються на області визначення цієї функції, тобто при $2-x>0$).

Запитання для контролю

1. Поясніть, у якому випадку функція $F(x)$ називається первісною для функції $f(x)$ на заданому проміжку. Наведіть приклади.
2. Сформулюйте основну властивість первісних і проілюструйте її на прикладах.
3*. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла. Наведіть приклади його обчислення.
4. Сформулюйте правила знаходження первісних. Поясніть їх на прикладах.
5*. Доведіть правила знаходження первісних.
6*. Запишіть і сформулюйте правила знаходження первісних за допомогою невизначених інтегралів.
7*. Запишіть і доведіть загальний вид первісних для функцій:

$x^{\alpha}\ (\alpha \neq -1),\ \frac{1}{x},\ \sin x,\ \cos x,\ \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{1}{\sin^2 x},\ e^x, a^x\,(a > 0,\ a \neq 1).$

Запишіть відповідні формули за допомогою невизначеного інтеграла.

Вправи

Доведіть, що функція $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку **(1–2)**.

1°. 1) $F(x) = x^5,\ f(x) = 5x^4,\ x \in (-\infty;\ \infty)$;
2) $F(x) = x^{-3},\ f(x) = -3x^{-4},\ x \in (0;\ \infty)$;
3) $F(x) = \frac{1}{7}x^7,\ f(x) = x^6,\ x \in (-\infty;\ \infty)$;
4) $F(x) = -\frac{1}{6}x^{-6},\ f(x) = x^{-7},\ x \in (0;\ \infty)$.

2. 1) $F(x) = \sin^2 x,\ f(x) = \sin 2x,\ x \in \boldsymbol{R}$;
2) $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x,\ f(x) = -\sin 2x,\ x \in \boldsymbol{R}$;
3) $F(x) = \sin 3x,\ f(x) = 3\cos 3x,\ x \in \boldsymbol{R}$;
4) $F(x) = 3 + \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ f(x) = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}},\ x \in (-\pi;\ \pi)$.

3. Перевірте, що функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$. Знайдіть загальний вигляд первісних для f, якщо:
1) $F(x) = \sin x - x\cos x,\ f(x) = x\sin x$;
2) $F(x) = \sqrt{x^2+1},\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;
3) $F(x) = \cos x + x\sin x,\ f(x) = x\cos x$;
4) $F(x) = x - \frac{1}{x},\ f(x) = \frac{1+x^2}{x^2}$.

Визначте, чи є функція $F(x)$ первісною для функції $f(x)$ на зазначеному проміжку **(4–5)**.

4°. 1) $F(x) = 3 - \sin x$, $f(x) = \cos x$, $x \in (-\infty; \infty)$;
2) $F(x) = 5 - x^4$, $f(x) = -4x^3$, $x \in (-\infty; \infty)$;
3) $F(x) = \cos x - 4$, $f(x) = -\sin x$, $x \in (-\infty; \infty)$;
4) $F(x) = x^{-2} + 2$, $f(x) = \frac{1}{2x^3}$, $x \in (0; \infty)$.

5. 1) $F(x) = 2x + \cos\frac{x}{2}$; $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$;
2) $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$, $x \in (-2; 2)$;
3) $F(x) = \frac{1}{x^2}$, $f(x) = 14 - \frac{1}{x^2}$, $x \in (0; \infty)$;
4) $F(x) = 4x\sqrt{x}$, $f(x) = 6\sqrt{x}$, $x \in (0; \infty)$.

6°. Знайдіть загальний вигляд первісних для функції **(6–8)**.
1) $f(x) = 2 - x^4$; 2) $f(x) = x + \cos x$; 3) $f(x) = 4x$; 4) $f(x) = -8$;
5) $f(x) = x^6$; 6) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 2$; 7) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^4}$; 8) $f(x) = x^3$.

7*. 1) $f(x) = 2 - x^3 + \frac{1}{x^3}$; 2) $f(x) = x - \frac{2}{x^5} + \cos x$; 3) $f(x) = \frac{1}{x^2} - \sin x$;
4) $f(x) = 5x^2 - 1$; 5) $f(x) = (2x - 8)^5$; 6) $f(x) = 3\sin 2x$;
7) $f(x) = (4 - 5x)^7$; 8) $f(x) = -\frac{1}{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$; 9) $f(x) = \frac{3}{(4 - 15x)^4}$;
10) $f(x) = \frac{2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$; 11) $f(x) = \frac{4}{(3x - 1)^2}$; 12) $f(x) = -\frac{2}{x^5} + \frac{1}{\cos^2(3x - 1)}$.

8*. 1) $f(x) = 1 - \cos 3x + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; 2) $f(x) = \frac{1}{\sin^2 4x} + \frac{1}{\sqrt{2 - x}} - 3x^2$;
3) $f(x) = \frac{2}{\cos^2(3x + 1)} - 3\sin(4 - x) + 2x$; 4) $f(x) = \frac{1}{(3 - 2x)^3} + \frac{3}{\sqrt{5x - 2}} - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

9. Для функції $f(x)$ знайдіть первісну $F(x)$, що набуває заданого значення в зазначеній точці:
1) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$; 2) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$;
3) $f(x) = x^3$, $F(-1) = 2$; 4) $f(x) = \sin x$, $F(-\pi) = -1$.

Для функції $f(x)$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку M **(10–12)**.

10. 1) $f(x) = 2x + 1$, $M(0; 0)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $M(1; 4)$;
3) $f(x) = x + 2$, $M(1; 3)$; 4) $f(x) = -x^2 + 3x$, $M(2; -1)$.

11°. 1) $f(x) = 2\cos x$, $M\left(-\frac{\pi}{2}; 1\right)$; 2) $f(x) = 1 - x^2$, $M(-3; 9)$;
3) $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}; -1\right)$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^4}$, $M\left(\frac{1}{2}; 3\right)$.

12. 1) $f(x)=4x+\frac{1}{x^2}$, $M(-1; 4)$; 2) $f(x) = x^3 + 2$, $M(2; 15)$;
3) $f(x) = 1 - 2x$, $M(3; 2)$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2}-10x^4+3$, $M(1; 5)$.

13*. Швидкість точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Запишіть формулу залежності її координати x від часу t, якщо відомо, що в початковий момент часу ($t = 0$) точка знаходилася в початку координат.

14*. Швидкість точки, що рухається прямолінійно, задана формулою $v(t)=2\cos\frac{t}{2}$. Запишіть формулу залежності координати точки від часу, якщо відомо, що в момент $t=\frac{\pi}{3}$ с точка знаходилася на відстані 4 м від початку координат.

15*. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t) = 12t^2 + 4$. Знайдіть закон руху точки, якщо в момент $t = 1$ с її швидкість дорівнює 10 м/с, а координата дорівнює 12 (одиниця вимірювання a дорівнює 1 м/с^2).

16*. Матеріальна точка масою m рухається по осі Ox під дією сили, напрямленої вздовж цієї осі. У момент часу t сила дорівнює $F(t)$. Знайдіть формулу залежності $x(t)$ від часу t, коли відомо, що при $t = t_0$ швидкість точки дорівнює v_0, а координата дорівнює x_0 ($F(t)$ вимірюється в ньютонах, t — у секундах, v — у метрах за секунду, m — у кілограмах):
1) $F(t) = 6 - 9t$, $t_0 = 1$, $v_0 = 4$, $x_0 = -5$, $m = 3$;
2) $F(t) = 14\sin t$, $t_0 = \pi$, $v_0 = 2$, $x_0 = 3$, $m = 7$;
3) $F(t) = 25\cos t$, $t_0=\frac{\pi}{2}$, $v_0 = 2$, $x_0 = 4$, $m = 5$;
4) $F(t) = 8t + 8$, $t_0 = 2$, $v_0 = 9$, $x_0 = 7$, $m = 4$.

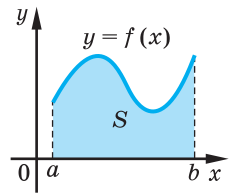
§ 15 ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

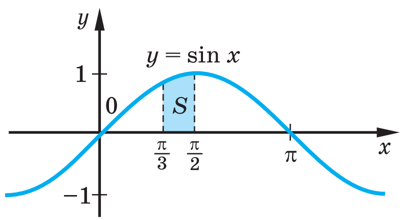
15.1. Геометричний зміст і означення визначеного інтеграла

Таблиця 19

<table>
<tr><th colspan="2">1. Обчислення визначеного інтеграла (формула Ньютона—Лейбніца)</th></tr>
<tr><th>Формула</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$, а $F(x)$ — довільна її первісна на цьому відрізку (тобто $F'(x) = f(x)$), то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$</td><td>Оскільки для функції $f(x) = x^2$ однією з первісних є $F(x) = \frac{x^3}{3}$, то

$$\int_1^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Криволінійна трапеція</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Ілюстрація</th></tr>
<tr><td>Нехай на відрізку $[a; b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень. **Фігуру, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією*.**</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">3. Площа криволінійної трапеції</th></tr>
<tr><th>Формула</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td>$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$</td><td>Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

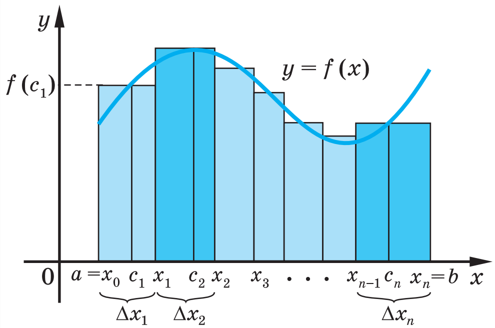


▶ Зображуючи ці лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція.

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$ ◁</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 19

<table>
<tr><td colspan="6">4. Властивості визначених інтегралів</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$</td><td colspan="2">$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$</td><td colspan="2">$\int\limits_a^b (f(x)+g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\int\limits_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$</td><td colspan="3">Якщо функція $f(x)$ інтегрована на $[a; b]$ і $c \in [a; b]$, то
$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td colspan="6">5. Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми</td></tr>
<tr><td colspan="6">



Нехай функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$.

Виконаємо такі операції.

1. Розіб'ємо відрізок $[a; b]$ на n відрізків точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (вважаємо, що $a = x_0$, $b = x_n$).
2. Позначимо довжину першого відрізка через Δx_1, другого — через Δx_2 і т. д. (тобто $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$).
3. На кожному з одержаних відрізків виберемо довільну точку c_i (тобто $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, де $i = 1, 2, \ldots, n$).
4. Складемо **суму $S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n$.**
   Цю суму **називають *інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку* $[a; b]$.**

Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума S_n прямує до деякого числа, яке і називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Геометричний зміст і означення визначеного інтеграла. Як відмічалося в § 14, інтегрування — це дія, обернена до диференціювання. Вона дозволяє за заданою похідною функції знайти (відновити) цю функцію. Покажемо, що ця операція тісно пов'язана з задачею обчислення площі.

Наприклад, у механіці часто доводиться визначати координату $x(t)$ точки при прямолінійному русі, знаючи закон зміни її швидкості $v(t)$ (нагадаємо, що $v(t) = x'(t)$).

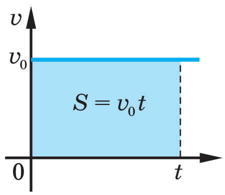


Рис. 101

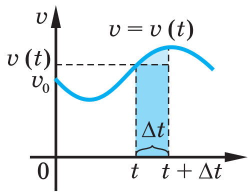


Рис. 102

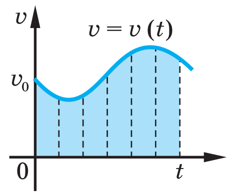


Рис. 103

Розглянемо спочатку випадок, коли точка рухається з постійною швидкістю $v = v_0$. Графіком швидкості в системі координат $(t; v)$ є пряма $v = v_0$, паралельна до осі часу t (рис. 101). Якщо вважати, що в початковий момент часу $t = 0$ точка знаходилася в початку координат, то її шлях s, пройдений за час t, обчислюється за формулою $s = v_0 t$. Величина $v_0 t$ дорівнює площі прямокутника, обмеженого графіком швидкості, віссю абсцис і двома вертикальними прямими, тобто шлях точки можна обчислити як площу під графіком швидкості.

Розглянемо випадок нерівномірного руху. Тепер швидкість можна вважати постійною тільки на маленькому відрізку часу Δt. Якщо швидкість v змінюється за законом $v = v(t)$, то шлях, пройдений за відрізок часу $[t; t + \Delta t]$, наближено виражається добутком $v(t)\,\Delta t$. А на графіку цей добуток дорівнює площі прямокутника із сторонами Δt і $v(t)$ (рис. 102). Точне значення шляху за відрізок часу $[t; t + \Delta t]$ дорівнює площі *криволінійної трапеції*, виділеної на цьому рисунку. Тоді весь шлях за відрізок $[0; t]$ може бути обчислений у результаті додавання площ таких криволінійних трапецій, тобто шлях буде дорівнювати площі заштрихованої фігури під графіком швидкості (рис. 103).

Наведемо відповідні означення і обґрунтування, які дозволять зробити наведені міркування більш строгими.

Нехай на відрізку $[a; b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 104).

Відрізок $[a; b]$ називають *основою цієї криволінійної трапеції.*

З'ясуємо, як можна обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою первісної функції $f(x)$.

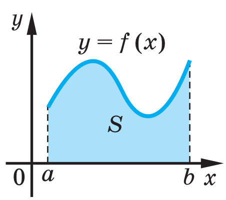
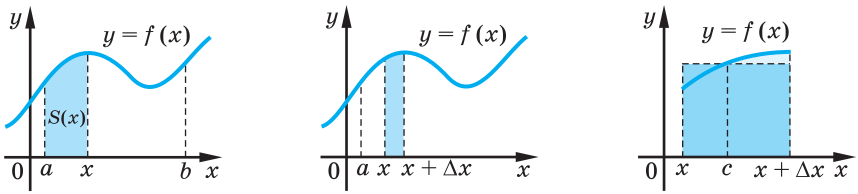


Рис. 104

Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a; x]$ (рис. 105, *а*), де x — будь-яка точка відрізка $[a; b]$. При $x = a$ відрізок $[a; x]$ вироджується в точку, і тому $S(a) = 0$, при $x = b$ маємо $S(b) = S$, де S — площа криволінійної трапеції з основою $[a; b]$ (див. рис. 104).



а *б* *в*

Рис. 105

Покажемо, що $S(x)$ *є первісною для функції* $f(x)$, тобто що $S'(x) = f(x)$.

За означенням похідної нам потрібно довести, що $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Для спрощення міркувань розглянемо випадок $\Delta x > 0$ (випадок $\Delta x < 0$ розглядається аналогічно).

Оскільки $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$, то геометрично ΔS — площа фігури, виділеної на рисунку 105, *б*.

Розглянемо тепер прямокутник з такою самою площею ΔS, однією із сторін якого є відрізок $[x; x + \Delta x]$ (рис. 105, *в*). Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то верхня сторона цього прямокутника перетинає графік функції в деякій точці з абсцисою $c \in [x; x + \Delta x]$ (інакше розглянутий прямокутник або містить криволінійну трапецію, виділену на рисунку 105, *в*, або міститься в ній, і відповідно його площа буде більша або менша від площі ΔS). Висота прямокутника дорівнює $f(c)$.

За формулою площі прямокутника маємо $\Delta S = f(c)\,\Delta x$. Тоді $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(c)$. (Ця формула буде правильною і при $\Delta x < 0$.)

Оскільки точка c лежить між x і $x + \Delta x$, то c прямує до x, якщо $\Delta x \to 0$. Враховуючи неперервність функції $f(x)$, також одержуємо, що

$$f(c) \to f(x) \text{ при } \Delta x \to 0.$$

Отже, $\frac{\Delta S}{\Delta x} \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. А це й означає, що $S'(x) = f(x)$, тобто $S(x)$ є первісною функції $f(x)$.

Оскільки $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ при всіх $x \in [a; b]$ відрізняється від $S(x)$ на постійну C, тобто

$$F(x) = S(x) + C. \qquad (1)$$

Щоб знайти C, підставимо $x = a$. Одержуємо $F(a) = S(a) + C$. Оскільки $S(a) = 0$, то $C = F(a)$ і рівність (1) можна записати так:

$$S(x) = F(x) - F(a). \qquad (2)$$

Враховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставляємо в формулу (2) $x = b$ і одержуємо $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Отже,

площу криволінійної трапеції (рис. 104) можна обчислювати за формулою

$$S = F(b) - F(a), \tag{3}$$

де $F(x)$ — довільна первісна для функції $f(x)$.

Таким чином, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$.

Різницю $F(b) - F(a)$ називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають так: $\int_a^b f(x)\,dx$.

Запис $\int_a^b f(x)\,dx$ читається: «Інтеграл від a до b еф від ікс де ікс». Числа a і b називаються *межами інтегрування*: a — нижньою межею, b — верхньою. Отже, за наведеним означенням

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Формулу (4) називають **формулою Ньютона–Лейбніца.**

Виконуючи обчислення визначеного інтеграла, зручно різницю $F(b) - F(a)$ позначати так: $F(x)\Big|_a^b$, тобто $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$. Користуючись цим позначенням, формулу Ньютона–Лейбніца можна записати у такому вигляді

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Наприклад, оскільки для функції $f(x) = e^x$ однією з первісних є $F(x) = e^x$, то

$$\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Зазначимо, що в тому випадку, коли для функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, функцію $f(x)$ називають *інтегрованою на відрізку* $[a; b]$.

З формул (3) і (4) одержуємо, що *площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку* $[a; b]$ *функції* $y = f(x)$, *відрізком* $[a; b]$ *осі* Ox *і прямими* $x = a$ *і* $x = b$ (рис. 104), *можна обчислювати за формулою*

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Наприклад, площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = \cos x$, відрізком $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ осі Ox і прямими $x = 0$ і $x = \frac{\pi}{6}$ (рис. 106), можна обчислити за формулою

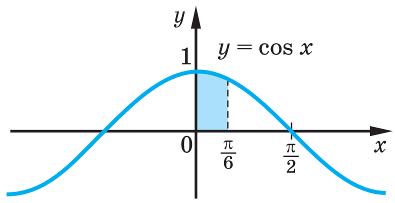


Рис. 106

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

(При обчисленні визначеного інтеграла враховано, що для функції $f(x) = \cos x$ однією з первісних є функція $F(x) = \sin x$.)

З а у в а ж е н н я. У задачах з курсу алгебри і початків аналізу на обчислення площ як відповідь найчастіше наводиться числове значення площі. Оскільки на координатній площині, де зображається вказана фігура, завжди вказується одиниця виміру по осях, то в цьому випадку ми завжди маємо і одиницю виміру площі — квадрат із стороною 1. Інколи, щоб підкреслити, що одержане число виражає саме площу, відповідь до останнього прикладу записують так: $S = \frac{1}{2}$ (кв. од.) — тобто квадратних одиниць. Відзначимо, що так записуються тільки числові відповіді. Якщо в результаті обчислень площі ми одержали, наприклад, що $S = 2a^2$, то ніяких позначень про квадратні одиниці не записується, оскільки відрізок a був виміряний у якихось лінійних одиницях і тоді вираз a^2 вже містить інформацію про ті квадратні одиниці, у яких вимірюється площа в цьому випадку.

2. Властивості визначених інтегралів. При формулюванні означення визначеного інтеграла ми вважали, що $a < b$. Зручно розширити поняття визначеного інтеграла, і для випадку $a > b$ прийняти за означенням, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (5)$$

Для випадку $a = b$ також за означенням будемо вважати, що

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \qquad (6)$$

Зазначимо, що формальне застосування формули Ньютона–Лейбніца до обчислення інтегралів у формулах (5) і (6) дає такий самий результат. Дійсно, якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то

$\int_a^a f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^a = F(a) - F(a) = 0.$ Також

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

За допомогою формули Ньютона–Лейбніца легко обґрунтовуються й інші властивості визначених інтегралів, наведені в пункті 4 таблиці 18.

- Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то для функції $kf(x)$ первісною буде функція $kF(x)$. Тоді

$$\int_a^b kf(x)\,dx = kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx.$$ Отже,

$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (7)$$

- Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, а $G(x)$ — первісною для функції $g(x)$, то для функції $f(x) + g(x)$ первісною буде функція $F(x) + G(x)$. Тоді

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F(x)+G(x))\Big|_a^b = (F(b)+G(b)) - (F(a)+G(a)) =$$

$$= (F(b)-F(a)) + (G(b)-G(a)) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Отже,

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \qquad (8)$$

- Якщо $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ і $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отже, якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a; b]$ і $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми. Історично інтеграл виник у зв'язку з обчисленням площ фігур, обмежених кривими, зокрема у зв'язку з обчисленням площі криволінійної трапеції.

Розглянемо криволінійну трапецію, зображену на рисунку 107 (функція $f(x)$ — неперервна на відрізку $[a; b]$). На цьому рисунку основу трапеції— відрізок $[a; b]$ — розбито на n відрізків (не обов'язково рівних) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (для зручності будемо вважати, що $a = x_0$, $b = x_n$). Через ці точки проведено вертикальні прямі. На першому відрізку вибрана довільна точка c_1, і на цьому відрізку як на основі побудований прямокутник із висотою $f(c_1)$. Аналогічно на другому відрізку вибрана довільна точка c_2, і на цьому відрізку як на основі побудований прямокутник із висотою $f(c_2)$ і т. д.

Площа S заданої криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ побудованих прямокутників. Позначимо цю суму через S_n, довжину першого відрізка через Δx_1, другого — через Δx_2 і т. д. (тобто $\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$). Тоді

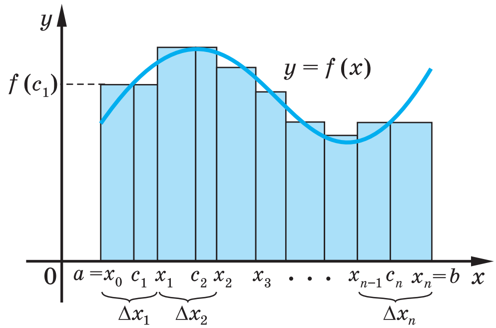


Рис. 107

$$S_n = f(c_1)\,\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n. \qquad (9)$$

Отже, площу S криволінійної трапеції можна наближено обчислювати за формулою (9), тобто $S \approx S_n$.

Суму (9) називають *інтегральною сумою функції* $f(x)$ *на відрізку* $[a; b]$. При цьому вважають, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і може набувати будь-яких значень: додатних, від'ємних і рівних нулю (а не тільки невід'ємних, як для випадку криволінійної трапеції). Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума S_n прямує до деякого числа, яке і називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Можна довести, що при цьому також виконується формула Ньютона – Лейбніца і всі розглянуті властивості визначеного інтеграла.

Зауваження. Змінюючи спосіб розбиття відрізка $[a; b]$ на n частин (тобто фіксуючи інші точки $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) і вибираючи на кожному з одержаних відрізків інші точки c_i (де $c_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$), ми будемо одержувати для функції $f(x)$ інші інтегральні суми. У курсі математичного аналізу доводиться, що для будь-якої неперервної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ незалежно від способу розбиття цього відрізка і вибору точок c_i, якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральні суми S_n прямують до одного й того самого числа.

Означення визначеного інтеграла через інтегральні суми дозволяє наближено обчислювати визначені інтеграли за формулою (9). Але такий спосіб потребує громіздких обчислень, і його використовують у тих випадках, коли для функції $f(x)$ не вдається знайти первісну (у цих випадках наближене обчислення визначеного інтеграла звичайно проводять на комп'ютері з використанням спеціальних програм). Якщо ж первісна для функції $f(x)$ відома, то інтеграл можна обчислити точно, використовуючи формулу Ньютона–Лейбніца (див. приклад у пункті 1 таблиці 19 та приклади, наведені далі).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Розв'язання

▶ $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1 - 0 = 1.$

Відповідь: 1. ◁

Коментар

Оскільки для функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ми знаємо первісну — це $F(x) = \operatorname{tg} x$ (див. табл. 18), то заданий інтеграл обчислюється безпосереднім застосуванням формули Ньютона–Лейбніца $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Приклад 2 Обчисліть $\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx.$

Розв'язання

I спосіб

▶ Для функції $f(x) = \frac{4}{x} - x$ однією з первісних є $F(x) = 4\ln|x| - \frac{x^2}{2}$. Тоді

$$\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx = \left(4\ln|x| - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$= \left(4\ln|3| - \frac{3^2}{2}\right) - \left(4\ln|1| - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4.$$ ◁

II спосіб

▶ $$\int\limits_1^3 \left(\frac{4}{x} - x\right) dx = \int\limits_1^3 \frac{4dx}{x} - \int\limits_1^3 x dx =$$

$$= 4\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^3 x dx = 4\ln|x|\Big|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3 =$$

$$= 4(\ln|3| - \ln|1|) - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 4\ln 3 - 4.$$ ◁

Коментар

Можливі два шляхи обчислення заданого інтеграла.

1) Спочатку знайти первісну для функції $f(x) = \frac{4}{x} - x$, використовуючи правила обчислення первісних і таблицю первісних, а потім знайти інтеграл за формулою Ньютона–Лейбніца.

2) Використати формулу (8)

$$\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$$

і записати заданий інтеграл як алгебраїчну суму двох інтегралів, кожний з яких можна безпосередньо обчислити, як у прикладі 1 (для першого доданка можна також використати формулу (7) і винести постійний множник 4 за знак інтеграла).

З а у в а ж е н н я. Заданий інтеграл розглядається на відрізку [1; 3], де $x > 0$. Але при $x > 0$ однією з первісних для функції $f(x)=\frac{1}{x}$ є функція $F(x) = \ln x$. Тому, враховуючи, що $x > 0$, можна, наприклад, записати, що $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^3$. Хоча, звичайно, наведений вище запис первісної теж є правильним (оскільки при $x > 0$ $\ln|x| = \ln x$).

Приклад 3 Обчисліть площу фігури, обмеженої прямими $x = 1$, $x = 8$, віссю Ox і графіком функції $y=\sqrt[3]{x}$.

Р о з в ' я з а н н я

▶ Зображуючи ці лінії, бачимо, що задана фігура — криволінійна трапеція (рис. 108).

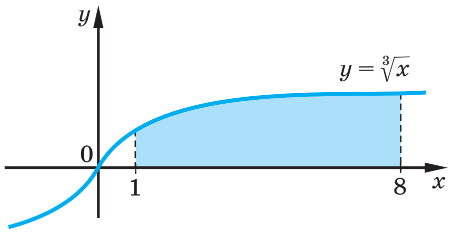


Рис. 108

Тоді її площа дорівнює

$$S=\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}dx=\int\limits_1^8 x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}\Bigg|_1^8=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8=$$

$$=\frac{3}{4}\left(8^{\frac{4}{3}}-1^{\frac{4}{3}}\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{8^4}-1\right)=\frac{45}{4}=11\frac{1}{4}.$$

Відповідь: $11\frac{1}{4}$ кв. од. ◁

К о м е н т а р

Задана фігура є криволінійною трапецією, і тому її площу можна обчислювати за формулою

$$S=\int\limits_a^b f(x)\,dx, \text{ де } a=1, b=8, f(x)=\sqrt[3]{x}.$$

Також потрібно врахувати, що на заданому відрізку [1; 8] значення $x > 0$, і за цієї умови можна записати $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$.

З а у в а ж е н н я. У задачах на обчислення за допомогою визначного інтегралу до відповіді найчастіше записують числове значення площі $\left(11\frac{1}{4}\right)$. Але якщо хочуть підкреслити, що ми одержали саме величину площі, то відповідь записують так: $11\frac{1}{4}$ кв. од. (тобто квадратних одиниць).

Вправи

1. Обчисліть интеграл:

1°) $\int\limits_{-1}^{2} x^4\,dx$; 2°) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; 3°) $\int\limits_{1}^{3} x^3\,dx$; 4°) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$;

5) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{(2x+1)^2}$; 6) $\int\limits_{0}^{\pi} 3\cos\frac{x}{2}\,dx$; 7) $\int\limits_{1}^{10} \frac{dx}{x^2}$; 8) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$.

2. Доведіть правильність рівності:

1) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_{0}^{1} dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \int\limits_{0}^{\sqrt[3]{3}} x^2\,dx$; 4) $\int\limits_{0}^{1} (2x+1)\,dx = \int\limits_{0}^{2} (x^3-1)\,dx$.

3. Обчисліть интеграл:

1) $\int\limits_{-\pi}^{2\pi} \sin\frac{x}{3}\,dx$; 2) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; 3) $\int\limits_{0}^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{9}}$; 4) $\int\limits_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$;

5) $\int\limits_{0}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin\frac{x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx$; 6) $\int\limits_{0}^{2} (1+2x)^3\,dx$; 7) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)\,dx$; 8) $\int\limits_{1}^{4} \left(x+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) dx$.

Обчисліть (попередньо виконавши рисунок) площу фігури, обмеженої заданими лініями **(4–8)**.

4. 1) $y = x^4$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$; 2) $y = x^4$, $y = 1$;
3) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$; 4) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5$.

5. 1) $y = 1 - x^3$, $y = 0$, $x = 0$; 2) $y = 2 - x^3$, $y = 1$, $x = -1$, $x = 1$;
3) $y = -x^2 - 4x$, $y = 0$, $x = -3$, $x = -1$; 4) $y = -x^2 - 4x$, $y = 1$, $x = -3$, $x = -1$.

6. 1) $y = x^3$, $y = 8$, $x = 1$; 2) $y = 2\cos x$, $y = 1$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$;
3) $y = x^2 - 2x + 4$, $y = 3$, $x = -1$; 4) $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

7. 1) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$; 2) $y = \frac{16}{x^2}$, $y = 2x$, $x = 4$;
3) $y = x^2$, $y = 2x$; 4) $y = 6 - 2x$, $y = 6 + x - x^2$.

8. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 4 - x^2$; 2) $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$;
3) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = x^3$.

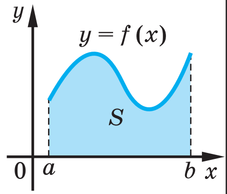
15.2. Обчислення площ і об'ємів за допомогою визначених інтегралів

Таблиця 20

1. Площа криволінійної трапеції

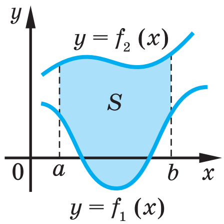
Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$, віссю Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$



2. Площа фігури, обмеженої графіками двох функцій і прямими $x = a$ і $x = b$

Формула

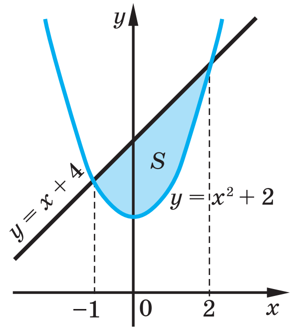


Якщо на заданому відрізку $[a; b]$ неперервні функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ мають ту властивість, що $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$\boxed{S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx} \qquad (1)$$

Приклад

Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$.



▶ Зобразимо задані лінії і абсциси їх точок перетину.

Абсциси точок перетину:

$$x^2 + 2 = x + 4,$$

$$x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2.$$

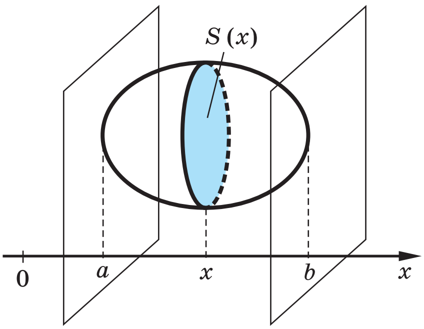
Тоді за формулою (1)

$$S = \int_{-1}^{2} \left((x+4) - (x^2+2)\right) dx =$$

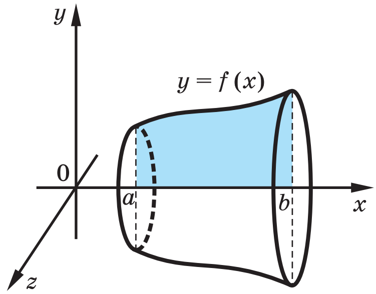
$$= \int_{-1}^{2} \left(x + 2 - x^2\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2} = 4\frac{1}{2}. \ \triangleleft$$

Продовж. табл. 20

<table>
<tr><th colspan="2">3. Об'єми тіл</th></tr>
<tr><td>


Якщо тіло вміщене між двома перпендикулярними до осі Ox площинами, що проходять через точки $x = a$ і $x = b$, то $V = \int_a^b S(x)\,dx$,

де $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, що проходить через точку $x \in [a; b]$ і перпендикулярна до осі Ox.
</td><td>


Якщо тіло одержане в результаті обертання навколо осі Ox криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$ і прямими $x = a$ і $x = b$, то

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$
</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Обчислення площ фігур. Обґрунтування формули площі криволінійної трапеції та приклади її застосування було наведено в пункті 15.1.

З'ясуємо, як можна обчислити площу фігури, зображеної на рисунку 109. Ця *фігура обмежена зверху графіком функції* $y = f_2(x)$, *знизу графіком функції* $y = f_1(x)$, *а також вертикальними прямими* $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$; *функції* $f_1(x)$ і $f_2(x)$ *неперервні і невід'ємні на відрізку* $[a; b]$ і $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$.

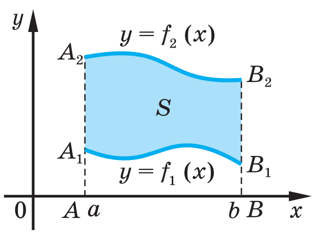


Рис. 109

Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ S_2 і S_1 криволінійних трапецій (S_2 — площа криволінійної трапеції AA_2B_2B, а S_1 — площа криволінійної трапеції AA_1B_1B). Але

$$S_1 = \int_a^b f_1(x)\,dx, \quad S_2 = \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

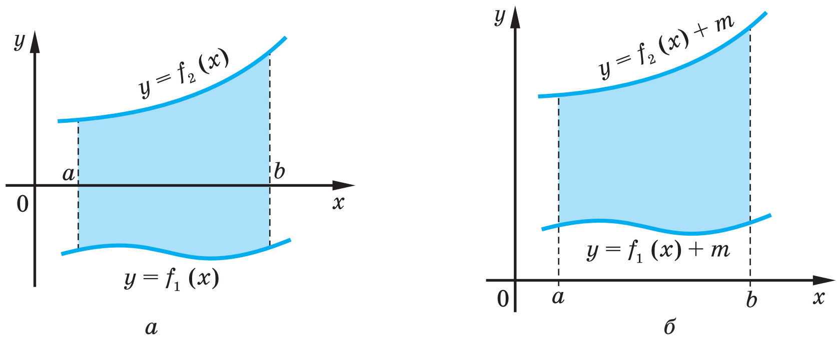


Рис. 110

Отже, $S = S_2 - S_1 = \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$ Таким чином, площу заданої фігури можна обчислювати за формулою

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx. \qquad (1)$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли задані функції не є невід'ємними на відрізку $[a;\ b]$ — достатньо виконання умов, що *функції* $f_1(x)$ і $f_2(x)$ *неперервні на відрізку* $[a;\ b]$ і $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всіх $x \in [a; b]$ (рис. 110, *а*). Для обґрунтування достатньо перенести задану фігуру паралельно вздовж осі Oy на m одиниць так, щоб вона розмістилася над віссю Ox (рис. 110, *б*). Таке перетворення означає, що задані функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ ми замінили відповідно на функції $y = f_1(x) + m$ і $y = f_2(x) + m$. Площа фігури, обмеженої графіками цих функцій та прямими $x = a$ і $x = b$, дорівнює площі заданої фігури. Отже, шукана площа

$$S = \int_a^b ((f_2(x) + m) - (f_1(x) + m))\,dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,dx.$$

Наприклад, площа фігури, зображеної на рисунку 111, дорівнює

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - \cos x)dx = (-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 + 1 = 2.$$

2. Обчислення об'ємів тіл. Задача обчислення об'єму тіла за допомогою визначеного інтеграла аналогічна до задачі знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай задано тіло об'ємом V, причому є така пряма (вісь Ox на рисунку 112), що яку б

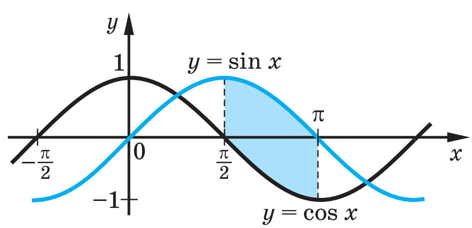


Рис. 111

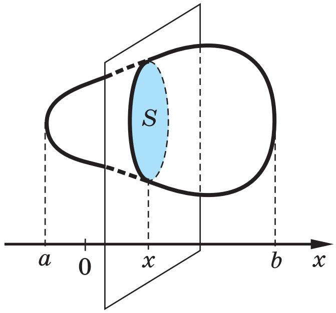


Рис. 112

не взяли площину, перпендикулярну до цієї прямої, нам відома площа S перерізу тіла цією площиною. Але площина, перпендикулярна до осі Ox, перетинає її в деякій точці x. Отже, кожному числу x (з відрізка $[a; b]$ (див. рис. 112) поставлено у відповідність єдине число $S(x)$ — площа перерізу тіла цією площиною. Тим самим на відрізку $[a; b]$ дано функцію $S(x)$. Якщо функція S неперервна на відрізку $[a; b]$, то справджується формула

$$V = \int_a^b S(x)\, dx. \tag{2}$$

Повне доведення цієї формули наведено в курсах математичного аналізу, а ми зупинимося на наочних міркуваннях, що приводять до цієї формули.

Поділимо відрізок $[a; b]$ на n відрізків однакової довжини точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ і припустимо, що

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1},\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Через кожну точку x_k проведемо площину α_k, перпендикулярну до осі Ox. Ці площини розрізають дане тіло на шари (рис. 113, *а*). Об'єм шару між площинами α_{k-1} і α_k (рис. 113, *б*) при достатньо великих n наближено дорівнює площі $S(x_{k-1})$ перерізу, помноженій на «товщину шару» Δx, і тому

$$V \approx S(x_0)\,\Delta x + S(x_1)\,\Delta x + \ldots + S(x_n)\,\Delta x = V_n.$$

Точність цієї наближеної рівності тим вища, чим тонші шари, на які розрізане тіло, тобто чим більше n.

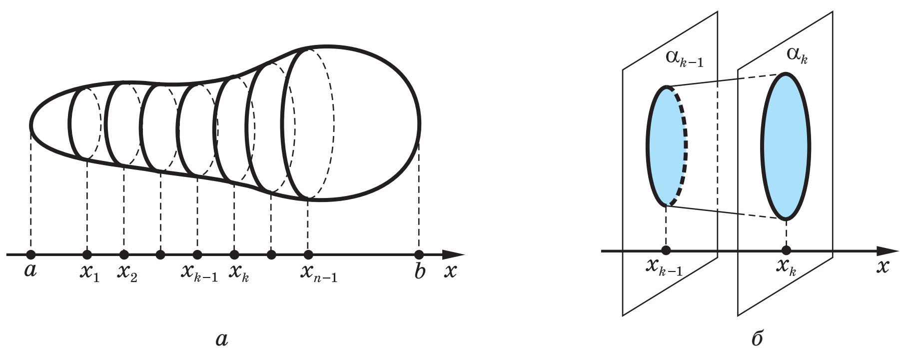
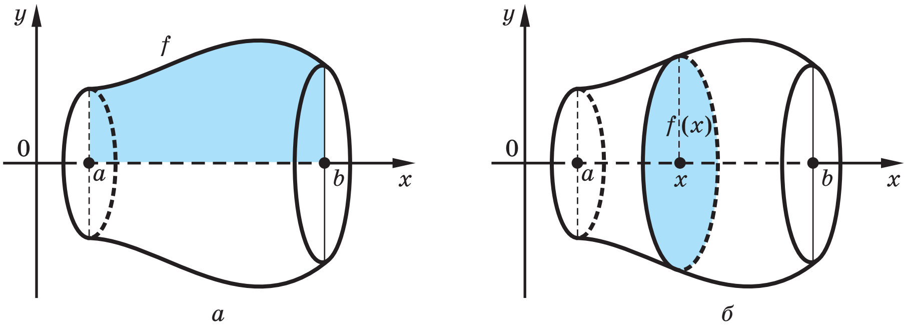


Рис. 113



а *б*

Рис. 114

Тому $V_n \to V$, якщо $n \to \infty$. За означенням визначеного інтеграла через інтегральні суми одержуємо, що $V_n \to \int_a^b S(x)\,dx$, якщо $n \to \infty$. Отже,

$$V = \int_a^b S(x)\,dx.$$

Використаємо одержаний результат для обґрунтування *формули об'єму тіл обертання.*

Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок $[a; b]$ осі Ox і обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, яка невід'ємна і неперервна на відрізку $[a; b]$. Внаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ox утворюється тіло (рис. 114, *а*), об'єм якого можна знайти за формулою

$$V = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx = \pi\int_a^b f^2(x)\,dx. \qquad (3)$$

Дійсно, кожна площина, яка перпендикулярна до осі Ox і перетинає відрізок $[a; b]$ цієї осі в точці x, дає в перерізі з тілом круг радіуса $f(x)$ і площею $S(x) = \pi f^2(x)$ (рис. 114, *б*). Звідси за формулою (2) одержуємо формулу (3).

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ та $y = \sqrt{-x}$.

Розв'язання

Зобразимо задані лінії (рис. 115) і знайдемо абсциси точок їх перетину:

$$x^2 = \sqrt{-x}, \qquad (1)$$

тоді $x^4 = -x$, $x^4 + x = 0$,

$x(x^3 + 1) = 0$,

Коментар

Зображуючи задані лінії (рис. 115), бачимо, що шукана фігура знаходиться між графіками двох функцій. Зверху вона обмежена графіком функції $f_2(x) = \sqrt{-x}$, а знизу —

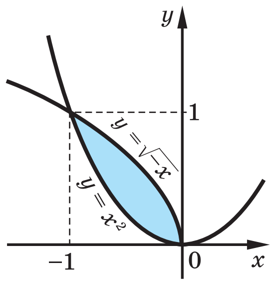


Рис. 115

$x = 0$ або $x = -1$ (обидва корені задовольняють рівнянню (1)).

Площа заданої фігури дорівнює

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{-x}-x^2\right)dx=\int_{-1}^{0}(-x)^{\frac{1}{2}}dx-$$

$$-\int_{-1}^{0}x^2dx=-\frac{2}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{0}=\frac{1}{3}.\ \triangleleft$$

графіком функції $f_1(x)=x^2$. Отже, її площу можна обчислити за формулою $S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx.$

Щоб знайти межі інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину графіків заданих функцій. Оскільки ординати обох кривих у точках перетину однакові, то достатньо розв'язати рівняння $f_1(x)=f_2(x)$.

Для розв'язування одержаного ірраціонального рівняння можна використати рівняння-наслідки (у кінці виконати перевірку) або рівносильні перетворення (на ОДЗ, тобто при $x \leqslant 0$).

Відзначимо також, що на одержаному відрізку $[-1;\ 0]$ значення $(-x) \geqslant 0$. Тоді $\sqrt{-x}=(-x)^{\frac{1}{2}}$.

Приклад 2 Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = 4 - x^2$ та $y = 0$.

Розв'язання

► Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній.

$$4 - x^2 = 0,\ x = \pm 2.$$

Оскільки задана фігура — криволінійна трапеція, то об'єм тіла обертання дорівнює

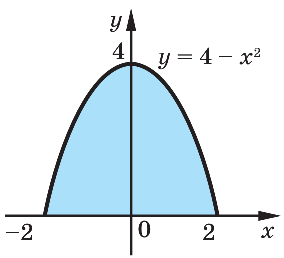


Рис. 116

Коментар

Зобразимо задану фігуру (рис. 116) і впевнимося, що вона є криволінійною трапецією. У цьому випадку об'єм тіла обертання можна обчислювати за готовою формулою

$$V=\int_a^b \pi f^2(x)\,dx=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Щоб знайти межі інтегрування, достатньо знайти абсциси точок перетину заданих ліній.

Як і для задач на обчислення площ, до відповіді записують числове значення об'єму, але можна підкреслити, що ми одержали саме величину об'єму, і записати

$$V=\int_{-2}^{2}\pi(4-x^2)^2\,dx=\pi\int_{-2}^{2}(16-8x+x^4)\,dx=$$
$$=\pi\left(16x-8\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2}=76\frac{4}{5}\pi.$$ ◁

Відповідь: $76\frac{4}{5}\pi$ куб. од. (тобто кубічних одиниць).

З а у в а ж е н н я. Можна було звернути увагу на те, що задана фігура симетрична відносно осі Oy і тому об'єм тіла, утвореного обертанням всієї фігури навколо осі абсцис, буде вдвічі більшим за об'єм тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, що спирається на відрізок [0; 2].

Запитання для контролю

1. Поясніть, як можна знайти площу криволінійної трапеції. Наведіть приклад.
2. 1) Запишіть формулу для знаходження площі фігури, обмеженої зверху і знизу графіками неперервних функцій, а також прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$. Наведіть приклад.
   2*) Доведіть цю формулу.
3. Запишіть формулу для знаходження об'єму тіла, одержаного обертанням криволінійної трапеції навколо осі абсцис. Наведіть приклад її використання.

Вправи

Обчисліть площу фігури, обмеженої даними лініями **(1–6)**.

1. 1) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 - 3x + 4$, $y = 4 - x$;
3) $y=\frac{4}{x}$, $y = 4$, $x = 4$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y = 3$, $x = 3$.

2. 1) $y = x^2 - 6x + 9$, $y = 5 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 3$;
3) $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$.

3. 1) $y = x^2$, $y = x + 2$; 2) $y = x^2$, $y = 2 - x$.

4. 1) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 4x + 5$; 2) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 6 - x^2$.

5. 1) $y=\frac{7}{x}$, $x + y = 8$; 2) $y=\frac{5}{x}$, $x + y = 6$;
3) $y=\frac{5}{x}$, $y = 4x + 1$, $x = 2$; 4) $y=\frac{3}{x}$, $y = 2x + 1$, $x = 3$.

6. 1) $y = 8 - x^2$, $y = 4$; 2) $y = 6 - x^2$, $y = 5$;
3) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

7. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $y = 8x - 2x^2$, дотичною до цієї параболи в її вершині і прямою $x = 0$.

8. Обчисліть площу фігури, обмеженої графіком функції $f(x) = 8 - 0{,}5x^2$, дотичною до нього в точці з абсцисою $x = -2$ і прямою $x = 1$.

9. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис криволінійної трапеції, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$; 2) $y=\sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;

3) $y=\sqrt{x}$, $x = 1$, $y = 0$; 4) $y = 1 - x^2$, $y = 0$.

10. Знайдіть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2$, $y = x$; 2) $y = 2x$, $y = x + 3$, $x = 0$, $x = 1$;

3) $y = x + 2$, $y = 1$, $x = 0$, $x = 2$; 4) $y=\sqrt{x}$, $y = x$.

11*. 1) Виведіть формулу об'єму кульового сегмента радіуса R і висоти H.

2) Виведіть формулу об'єму зрізаного конуса висоти H з радіусами основ R і r.

§ 16 НАЙПРОСТІШІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Поняття диференціального рівняння і його розв'язку. До цього часу ми розглядали рівняння, у яких невідомими були числа. У математиці та її застосуваннях доводиться розглядати рівняння, у яких невідомими є функції. Так, задача про знаходження шляху $s(t)$ за заданою швидкістю $v(t)$ зводиться до розв'язування рівняння $s'(t) = v(t)$, де $v(t)$ — задана функція, а $s(t)$ — шукана функція.

Наприклад, якщо $v(t) = 3 - 4t$, то для знаходження $s(t)$ потрібно розв'язати рівняння $s'(t) = 3 - 4t$.

Це рівняння містить похідну невідомої функції. Такі рівняння називають *диференціальними рівняннями*. *Розв'язком* диференціального рівняння називається будь-яка функція, яка задовольняє цьому рівнянню (тобто функція, при підстановці якої в задане рівняння одержуємо тотожність).

Приклад 1 Розв'яжіть диференціальне рівняння $y' = x + 3$.

Р о з в ' я з а н н я

▶ Потрібно знайти функцію $y(x)$, похідна якої дорівнює $x + 3$, тобто знайти первісну для функції $x + 3$. За правилами знаходження первісних одержуємо $y=\frac{x^2}{2}+3x+C$, де C — довільна постійна. ◁

При розв'язуванні диференціальних рівнянь слід враховувати, що *розв'язок диференціального рівняння визначається неоднозначно, з точністю до постійної*. Такий розв'язок називають *загальним розв'язком* заданого рівняння.

Звичайно до диференціального рівняння додається умова, з якої ця постійна визначається. Розв'язок, одержаний з використанням такої умови, називають *частинним розв'язком* заданого диференціального рівняння.

Приклад 2 Знайдіть розв'язок $y(x)$ диференціального рівняння $y' = \sin x$, що задовольняє умові $y(0) = 2$.

Розв'язання

▶ Усі розв'язки цього рівняння записуються формулою $y(x) = -\cos x + C$. З умови $y(0) = 2$ знаходимо $-\cos 0 + C = 2$. Тоді $C = 3$.

Відповідь: $y = -\cos x + 3$. ◁

Розв'язування багатьох фізичних, біологічних, технічних і інших практичних задач зводиться до розв'язування диференціального рівняння

$$y' = ky, \tag{1}$$

де k — задане число. Розв'язками цього рівняння є функції

$$y = Ce^{kx}, \tag{2}$$

де C — постійна, яка визначається умовами конкретної задачі.

Наприклад, у дослідах встановлено, що швидкість $m'(t)$ розмноження бактерій (для яких достатньо їжі) пов'язана з масою $m(t)$ бактерій у момент часу t рівнянням

$$m'(t) = km(t),$$

де k — додатне число, що залежить від виду бактерій і зовнішніх умов. Розв'язками цього рівняння є функції

$$m(t) = Ce^{kt}.$$

Постійну C можна знайти, наприклад, з умови, що в момент $t = 0$ маса m_0 бактерій відома. Тоді $m(0) = m_0 = Ce^{k \cdot 0} = C$, і тому

$$m(t) = m_0 e^{kt}.$$

Іншим прикладом застосування рівняння (1) є задача про радіоактивний розпад речовини. Якщо $m'(t)$ — швидкість радіоактивного розпаду в момент часу t, то $m'(t) = -km(t)$, де k — постійна, що залежить від радіоактивності речовини. Розв'язками цього рівняння є функції

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Якщо в момент часу t маса речовини дорівнює m_0, то $C = m_0$, і тому

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \tag{3}$$

Відзначимо, що на практиці швидкість розпаду радіоактивної речовини характеризується періодом напіврозпаду, тобто проміжком часу, протягом якого розпадається половина вихідної речовини.

Нехай T — період напіврозпаду, тоді з рівності (3) при $t = T$ одержуємо $\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-kT}$. Звідси $e^{kT} = 2$, $k = \frac{\ln 2}{T}$. У цьому випадку формула (3) запишеться так:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{\ln 2}{T} \cdot t} = m_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T}} = m_0 2^{-\frac{t}{T}}, \text{ тобто}$$

$$m(t) = m_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

2. Гармонічні коливання. У практиці часто зустрічаються процеси, що періодично повторюються, наприклад коливальні рухи маятника, струни, пружини і т. д.; процеси, пов'язані із змінним електричним струмом, магнітним полем і т. д. Розв'язування багатьох таких задач зводиться до розв'язування диференціального рівняння

$$y'' = -\omega^2 y, \tag{4}$$

де ω — задане додатне число, $y = y(x)$, $y'' = (y'(x))'$.

Розв'язками рівняння (4) є функції

$$y(x) = C_1 \sin(\omega x + C_2), \tag{5}$$

де C_1 і C_2 — постійні, які визначаються умовами конкретної задачі. Рівняння (4) називають *диференціальним рівнянням гармонічних коливань.*

Наприклад, якщо $y(t)$ — відхилення точки струни, що вільно коливається, від положення рівноваги в момент часу t, то

$$y(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

де A — амплітуда коливання, ω — кутова частота, φ — початкова фаза коливання.

Графіком гармонічного коливання є *синусоїда.*

3. Приклади застосування первісної й інтеграла до розв'язування практичних задач.

Приклад 3 Циліндричний бак, висота якого дорівнює 4,5 м, а радіус основи дорівнює 1 м, заповнений водою. За який час витече вода з бака через круглий отвір у дні бака, якщо радіус отвору дорівнює 0,05 м?

Розв'язання

▶ Позначимо висоту бака H, радіус його основи R, радіус отвору r (довжини вимірюємо в метрах, час — у секундах) (рис. 117).

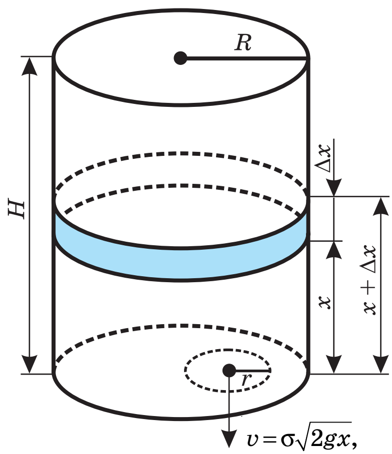


Рис. 117

Швидкість витікання рідини v залежить від висоти стовпа рідини x і обчислюється за формулою Бернуллі

$$v = \sigma\sqrt{2gx}, \tag{6}$$

де $g = 9{,}8$ м/с^2, σ — коефіцієнт, що залежить від властивості рідини; для води $\sigma = 0{,}6$. Тому при зменшенні рівня води в баці швидкість витікання зменшується (а не постійна).

Нехай $t(x)$ — час, за який з бака висотою x і радіусом основи R витікає вода через отвір радіуса r (рис. 117).

Знайдемо наближено відношення $\frac{\Delta t}{\Delta x}$, вважаючи, що за час $\Delta t = t(x +$

$+ \Delta x) - t(x)$ швидкість витікання води постійна і виражається формулою (6).

За час Δt об'єм води, що витекла з бака, дорівнює об'єму циліндра висотою Δx з радіусом основи R (див. рис. 117), тобто дорівнює $\pi R^2 \Delta x$. З іншого боку, цей об'єм дорівнює об'єму циліндра, основою якого служить отвір у дні бака, а висота дорівнює добутку швидкості витікання v на час Δt, тобто об'єм дорівнює $\pi r^2 v \Delta t$. Таким чином, $\pi R^2 \Delta x = \pi r^2 v \Delta t$.

Враховуючи формулу (6), одержуємо

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{R^2}{r^2 v} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2gx}} = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Тоді при $\Delta x \to 0$ одержуємо рівність

$$t'(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Звідси

$$t(x) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{x} + C.$$

Якщо $x = 0$ (у баці немає води), то $t(0) = 0$, тому $C = 0$. При $x = H$ знаходимо шуканий час

$$t(H) = \frac{R^2}{r^2 \sigma \sqrt{g}} \cdot \sqrt{2H}.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо

$$t(4{,}5) = \frac{1^2}{(0{,}05)^2 \cdot 0{,}6 \cdot \sqrt{9{,}8}} \cdot \sqrt{9} \approx 639 \text{ (c)}.$$

Відповідь: 639 с. ◁

Приклад 4 Обчисліть роботу сили F при стиску пружини на 0,06 м, якщо для її стиску на 0,01 м потрібна сила 5 Н.

Розв'язання

▶ За законом Гука, сила F пропорційна розтягу або стиску пружини, тобто $F = kx$, де x — величина розтягу чи стиску (у метрах), k — постійна. З умови задачі знаходимо k. Оскільки при $x = 0{,}01$ м сила $F = 5$ Н, то $k = \frac{F}{x} = 500$.

Отже, $F(x) = kx = 500x$.

Знайдемо формулу для обчислення роботи при переміщенні тіла (яке розглядається як матеріальна точка), що рухається під дією змінної сили $F(x)$, направленої вздовж осі Ox. Нехай тіло перемістилося з точки $x = a$ в точку $x = b$.

Позначимо через $A(x)$ роботу, яку виконано при переміщенні тіла з точки a в точку x. Надамо x приросту Δx. Тоді $\Delta A = A(x + \Delta x) - A(x)$ — робота, яка виконується силою $F(x)$ при переміщенні тіла з точки x в точку $x + \Delta x$. Якщо $\Delta x \to 0$, то силу $F(x)$ на відрізку $[x; x + \Delta x]$ будемо вважати постійною і рівною $F(x)$. Тому

$\Delta A = F(x) \cdot \Delta x$. Звідси $\frac{\Delta A}{\Delta x} = F(x)$. Тоді при $\Delta x \to 0$ одержуємо $A'(x) = F(x)$.

Остання рівність означає, що $A(x)$ є первісною для функції $F(x)$.

Враховуючи, що $A(a) = 0$, за формулою Ньютона–Лейбніца одержуємо

$$\int_a^b F(x)dx = A(x)\Big|_a^b = A(b) - A(a) = A(b) = A.$$

Таким чином,

робота змінної сили $F(x)$ при переміщенні тіла з точки a в точку b дорівнює

$$A = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Використовуючи дані задачі, одержуємо

$$A = \int_0^{0,06} 500x dx = 500\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,06} = 0,9 \text{ (Дж)}. \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Поясніть, яке рівняння називається диференціальним рівнянням. Наведіть приклади.
2. Поясніть, яка функція називається розв'язком диференціального рівняння. Наведіть приклади.

Вправи

1. Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v(t)$ (м/сек). Обчисліть шлях, який пройде тіло за проміжок часу від $t = t_1$ до $t = t_2$:
1) $v(t) = 3t^2 + 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$; 2) $v(t) = 2t^2 + t$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$.

2. Розв'яжіть диференціальне рівняння:
1) $y' = 3 - 4x$; 2) $y' = 6x^2 - 8x + 1$; 3) $y' = 3e^{2x}$;
4) $y' = 4\cos 2x$; 5) $y' = 3\sin x$; 6) $y' = \cos x - \sin x$.

3. Знайдіть розв'язок диференціального рівняння, який задовольняє заданій умові:
1) $y' = \sin x$, $y(0) = 0$; 2) $y' = 2\cos x$, $y(\pi) = 1$;
3) $y' = 3x^2 + 4x - 1$, $y(1) = -2$; 4) $y' = 2 + 2x - 3x^2$, $y(-1) = 2$;
5) $y' = e^x$, $y(1) = 1$; 6) $y' = e^{-x}$, $y(0) = 2$.

4. Яку роботу потрібно витратити на стискання пружини на 4 см, якщо відомо, що сила 2 Н стискає цю пружину на 1 см?

5. Сила 4 Н розтягує пружину на 8 см. Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягти пружину на 8 см?

6. Вода, що подається з площини основи в циліндричний бак через отвір у дні, заповнює весь бак. Визначіть затрачену при цьому роботу. Висота бака дорівнює h, радіус основи r.
7. Знайдіть роботу проти сил виштовхування під час занурення кулі у воду.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Знайдіть первісну для функції $f(x) = e^{2x} - \cos x$, графік якої проходить через початок координат.
2. Знайдіть первісну для функції $f(x) = \sin x - e^{3x}$, графік якої проходить через початок координат.

Знайдіть первісну для функції $y = f(x)$, графік якої проходить через дану точку **(3–7)**.

3. 1) $f(x)=\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}+4\cos 4x,\ A(\pi;\ 3)$; 2) $f(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-5\sin 5x,\ B(\pi;\ 0)$;

   3) $f(x) = 5x^4 + 3x^2 - 4,\ B(-1;\ 12)$; 4) $f(x)=\frac{3}{2\sqrt{x}}-2x,\ N(9;\ -8)$.

4. 1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5,\ A(2;\ 6)$; 2) $f(x) = 3x^2 - 6x + 4,\ A(1;\ 4)$;

   3) $f(x)=\frac{12}{\sqrt{3x-2}},\ A(9;\ 30)$.

5. 1) $f(x) = 4x^3 - 2x + 3,\ A(1;\ 8)$; 2) $f(x)=\frac{12}{\sqrt{4x-3}},\ A(3;\ 18)$;

   3) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3x+4}},\ A(4;\ 5)$; 4) $f(x) = 4e^{2x-1},\ A(1;\ 3e)$.

6. 1) $f(x)=\frac{3}{\sqrt{4x+5}},\ M(5;\ 7)$; 2) $f(x) = 6e^{3x-2},\ A(1;\ 5e)$;

   3) $f(x) = 6x^2 + e^{4x},\ A\left(\frac{1}{2};\ \frac{e^2}{4}\right)$; 4) $f(x) = 3x^2 - 4x + 5,\ M(2;\ 7)$.

7. 1) $f(x)=16x^3+e^{\frac{x}{2}},\ B\left(1;\ 2\sqrt{e}\right)$; 2) $f(x)=\frac{6}{\cos^2 6x},\ A\left(\frac{\pi}{18};\ 3\sqrt{3}\right)$;

   3) $f(x)=\frac{5}{2\sqrt{x}}+x,\ M(4;\ -3)$; 4) $f(x)=\frac{4}{\sin^2 4x},\ B\left(\frac{\pi}{24};\ -2\sqrt{3}\right)$.

Обчисліть інтеграл **(8–9)**.

8. 1) $\int\limits_{-1}^{2}(x^2-4x+5)dx$; 2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos 2x+\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}\right)dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\sin 3x-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)dx$;

4) $\int\limits_{1}^{3}\left(\frac{4}{x}-x\right)dx$; 5) $\int\limits_{1}^{4}\left(\frac{3}{x}+x\right)dx$; 6) $\int\limits_{-3}^{2}(x^2-2x)dx$.

9. 1) $\int\limits_{-1}^{3}(x^2+4x)dx$; 2) $\int\limits_{1}^{3}(4x^3-4x+1)dx$; 3) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{9}}\frac{dx}{\cos^2 3x}$; 4) $\int\limits_{\pi}^{2\pi}\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{4}}$.

Обчисліть площу фігури, обмеженої даними лініями **(10–14)**.

10. 1) $y = x^2 - 2x + 3$, $y = 3 - x$; 2) $y = x^2 - 5x + 2$, $y = 2 - x$;

3) $y=\frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = 4$; 4) $y=\frac{2}{x}$, $y = 2$, $x = 3$;

11. 1) $y = x^2 - 4x + 4$, $y = 2 - x$; 2) $y = x^2 + 2x + 1$, $y = x + 1$;

3) $y = 5 - x^2$, $y = x + 3$; 4) $y = 4 - x^2$, $y = x + 4$;

12. 1) $y = x^3$, $y = x$; 2) $y = x^3$, $y = 4x$;

3) $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = x^2 - 2x + 1$; 4) $y = x^2 + 2x + 2$, $y = 2 - x^2$;

13. 1) $y=\frac{2}{x}$, $x + y = 3$; 2) $y=\frac{4}{x}$, $x + y = 5$;

3) $y=\frac{3}{x}$, $y = 4x - 1$, $x = 2$; 4) $y=\frac{5}{x}$, $y = 2x + 3$, $x = 3$;

14. 1) $y = 9 - x^2$, $y = 1$; 2) $y = 5 - x^2$, $y = 4$;

3) $y = x^2$, $y = 8x - x^2$; 4) $y = x^2$, $y = 3x - 2x^2$.

15. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{8}{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 2$, $x = 8$, навпіл?

16. При якому значенні a пряма $x = a$ ділить площу фігури, обмеженої графіком функції $y=\frac{4}{x}$ та прямими $y = 0$, $x = 4$, $x = 9$, навпіл?

17. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 2x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 2$, та віссю ординат.

18. Знайдіть площу фігури, обмеженої параболою $y = 3x - x^2$, дотичною, проведеною до даної параболи в точці з абсцисою $x_0 = 3$, та віссю ординат.

19. Знайдіть площу фігури, обмеженої графіками функцій $y=\sqrt{x+1}$ і $y=\sqrt{7-x}$ та віссю абсцис.

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ

Інтегральне числення і саме поняття інтеграла виникло з необхідності обчислення площ плоских фігур і об'ємів тіл. Ідеї інтегрального числення беруть свій початок у роботах древніх математиків. Зокрема, важливе значення для розвитку інтегрального числення мав *метод вичерпування,* запропонований Евдоксом Кнідським (бл. 408 — бл. 355 рр. до н. е.) і вдосконалений Архімедом. За цим методом для обчислення площі плоскої фігури навколо неї описується ступінчаста фігура і в неї вписується ступінчаста фігура. Збільшуючи кількість сторін одержаних многокутників, знаходять границю, до якої прямують площі ступінчастих фігур (саме так у курсі геометрії ви доводили формулу площі круга). Архімед передбачив багато ідей інтегрального числення. Але пройшло більш як півтори тисячі років, перш ніж ці ідеї були доведені до рівня числення. Відзначимо, що математики XVII ст., які здобули багато нових результатів, училися на працях Архімеда. Власне, у XVII ст. було зроблено багато відкриттів, що стосуються інтегрального числення, введені основні поняття і терміни.

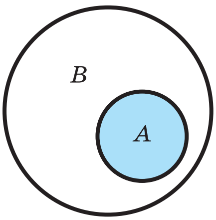
Символ $\int$ увів Лейбніц (1675 р.). Цей знак є зміненою латинською буквою S (перша буква слова *summa*). Саме слово *інтеграл* увів Я. Бернуллі (1690 р.). Інші відомі вам терміни, що стосуються інтегрального числення, з'явились значно пізніше. Назва *первісна функція,* що застосовується тепер, замінила більш ранню «примітивна функція», яку ввів Лагранж (1797 р.). Латинське слово *primitivus* перекладається як «початковий»: функція $F(x)=\int f(x)dx$ — початкова (або первісна) для функції $f(x)$, яка утворюється з $F(x)$ диференціюванням. Поняття *невизначеного інтеграла* і його позначення ввів Лейбніц, а позначення *визначеного інтеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$ ввів К. Фур'є (1768—1830).

Слід зауважити, що при всій значущості результатів, здобутих математиками XVII ст., інтегрального числення ще не було. Необхідно було виділити загальні ідеї, на яких ґрунтується розв'язування багатьох окремих задач, а також встановити зв'язок операцій диференціювання й інтегрування. Це виконали Ньютон і Лейбніц, які відкрили незалежно один від одного факт, відомий нам під назвою формули Ньютона–Лейбніца. Тим самим остаточно оформився загальний метод. Треба було ще навчитися знаходити первісні багатьох функцій, дати логічні основи нового числення тощо. Але головне вже було зроблено: диференціальне й інтегральне числення створене. Методи інтегрального числення активно розвивались у наступному столітті (насамперед слід назвати імена Л. Ейлера, який завершив систематичне дослідження інтегрування елементарних функцій, і Й. Бернуллі). У розвиток інтегрального числення значний вклад внесли російські математики українського походження М. В. Остроградський (1801—1862), В. Я. Буняковський (1804–1889).

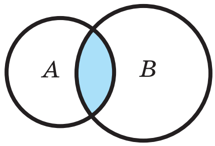
Розділ 3
Елементи комбінаторики, теорії імовірностей та статистики

§17 МНОЖИНИ ТА ОПЕРАЦІЇ НАД НИМИ

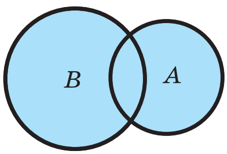
Таблиця 21

Поняття множини та її елементів	
Елемент a належить множині A $\Leftrightarrow$ $a \in A$ Елемент b не належить множині A $\Leftrightarrow$ $b \notin A$ У множині немає елементів $\Leftrightarrow$ $\varnothing$	Множину можна уявити собі як сукупність деяких об'єктів, що об'єднані за якоюсь ознакою. У математиці множини — це одне з основних неозначуваних понять. **Кожний об'єкт, що входить до множини A, називається *елементом* цієї *множини*.** Множина, що не містить жодного елемента, називається порожньою множиною і позначається $\varnothing$.
Підмножина ($\subset$)	
 $A \subset B$ $\Leftrightarrow$ Якщо $x \in A$, то $x \in B$	**Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то говорять, що множина A є підмножиною множини B** і записують так: $A \subset B$. Використовується також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B.
Рівність множин	
$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \in B \Rightarrow x \in A \end{cases}$	**Дві множини називаються рівними, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини.**

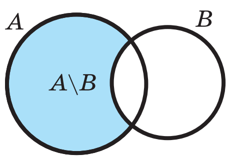
Продовж. табл. 21

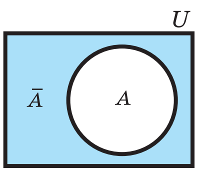
<table>
<tr><th colspan="2">Переріз множин (∩)</th></tr>
<tr><td>

$C = A \cap B$

$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \in B$</td><td>Перерізом множин A і B називають їх спільну частину, тобто множину C всіх елементів, що належать як множині A, так і множині B.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Об’єднання множин (∪)</th></tr>
<tr><td>

$C = A \cup B$

$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$</td><td>Об’єднанням множин A і B називають множину C, складену з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин (A або B).</td></tr>
<tr><th colspan="2">Різниця множин (\)</th></tr>
<tr><td>

$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ і $x \notin B$</td><td>Різницею множин A і B називається множина C, яка складається з тих елементів, які належать множині A і не належать множині B.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Доповнення множини</th></tr>
<tr><td>

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$</td><td>Якщо всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої універсальної множини U, то різниця $U \setminus A$ називається доповненням множини A. Тобто доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A (але які належать універсальній множині U).</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття множини. Одним з основних понять, які використовуються в математиці, є поняття множини. Для нього не дається означення. Можна пояснити, що *множиною* називають довільну сукупність об'єктів, а самі об'єкти — *елементами* даної *множини*. Так, можна говорити про множину учнів у класі (елементи — учні), множину днів тижня (елементи — дні тижня), множину натуральних дільників числа 6 (елементи — числа 1, 2, 3, 6) тощо.

У курсах алгебри та алгебри і початків аналізу найчастіше розглядають множини, елементами яких є числа, і тому їх називають числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, якщо множина M складається з чисел 1; 2; 3, то її позначають так: $M = \{1;\ 2;\ 3\}$. Той факт, що число 2 входить до цієї множини (є елементом даної множини M) записується за допомогою спеціального значка $\in$ так: $2 \in M$; а те, що число 5 не входить до цієї множини (не є елементом даної множини), записується так: $5 \notin M$.

Можна розглядати також множину, яка не містить жодного елемента, — *порожню множину*.

Наприклад: множина простих дільників числа 1 — порожня множина.

Для деяких множин існують спеціальні позначення. Так, порожня множина позначається символом $\varnothing$, множина всіх натуральних чисел — літерою $\boldsymbol{N}$, множина всіх цілих чисел — літерою $\boldsymbol{Z}$, множина всіх раціональних чисел — літерою $\boldsymbol{Q}$, а множина всіх дійсних чисел — літерою $\boldsymbol{R}$.

Множини бувають скінченні і нескінченні в залежності від того, яку кількість елементів вони містять. Так, множини $A = \{7\}$; $M = \{1;\ 2;\ 3\}$ — скінченні, бо містять скінченне число елементів, а множини $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$ — нескінченні.

Множини задають або за допомогою переліку їх елементів (це можна зробити лише для скінченних множин), або за допомогою опису, коли задається правило (*характеристична властивість*), яке дозволяє визначити, належить чи ні даний об'єкт множині, що розглядається. Наприклад, $A = \{-1;\ 0;\ 1\}$ (множина задана переліком елементів), B — множина парних цілих чисел (множина задана характеристичною властивістю елементів множини). Останню множину інколи записують так: $B = \{b \mid b$ — парне ціле число$\}$ або так: $B = \{b \mid b = 2m$, де $m \in \boldsymbol{Z}\}$ — тут після вертикальної риски записана характеристична властивість.

У загальному вигляді запис множини за допомогою характеристичної властивості можна позначити так: $A = \{x \mid P(x)\}$, де $P(x)$ — характеристична властивість. Наприклад, $\{x \mid x^2 - 1 = 0\} = \{-1,\ 1\}$, $\{x \mid x \in \boldsymbol{R}$ і $x^2 + 1 = 0\} = \varnothing$.

2. Рівність множин. Нехай A — множина цифр тризначного числа 312, тобто $A = \{3;\ 1;\ 2\}$, а B — множина натуральних чисел, менших чотирьох, тобто $B = \{1;\ 2;\ 3\}$. Оскільки ці множини складаються з одних і тих самих елементів, то вони вважаються рівними. Це записують так: $A = B$. Для нескінченних множин таким способом (порівнюючи всі елементи) встановити їх рівність неможливо. Тому в загальному випадку рівність множин означається таким чином.

Дві множини називаються *рівними*, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини.

З наведеного означення рівності множин випливає, що в множині однакові елементи не розрізняються. Дійсно, наприклад, $\{1; 2; 2\} = \{1; 2\}$, оскільки кожний елемент першої множини (1 або 2) є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини (1 або 2) є елементом першої. Тому, записуючи множину, найчастіше кожний її елемент записують тільки один раз.

3. Підмножина.

Якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, то говорять, що множина A є підмножиною множини B.

Це записують так: $A \subset B$. Наприклад, $\{1; 2\} \subset \{0; 1; 2; 3\}$, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$ (оскільки будь-яке натуральне число — ціле), $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$ (оскільки будь-яке ціле число — раціональне), $\boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$ (оскільки будь-яке раціональне число — дійсне).

Вважається, що завжди $\varnothing \subset A$, тобто *порожня множина є підмножиною будь-якої множини.*

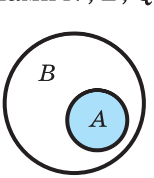
Інколи замість запису $A \subset B$ використовується також запис $A \subseteq B$, якщо множина A або є підмножиною множини B, або дорівнює множині B. Наприклад, можна записати, що $A \subseteq A$.

Співставимо означення рівності множин з означенням підмножини. Якщо множини A і B рівні, то: 1) кожний елемент множини A є елементом множини, отже, A — підмножина B ($A \subseteq B$); 2) кожний елемент множини B є елементом множини A, отже, B — підмножина A ($B \subseteq A$). Таким чином,

дві множини рівні, якщо кожна з них є підмножиною іншої.

$\boxed{A = B \text{ означає те саме, що } A \subseteq B \text{ і } B \subseteq A}$

Інколи співвідношення між множинами зручно ілюструвати за допомогою кругів (які часто називають кругами Ейлера–Венна). Наприклад, рисунок 118 ілюструє означення підмножини, а рисунок 119 — відношення між множинами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$.



$\boxed{A \subset B} \Leftrightarrow \boxed{\text{Якщо } x \in A, \text{ то } x \in B}$

Рис. 118

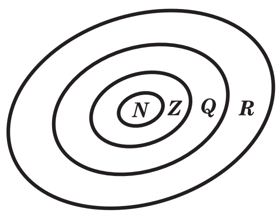


Рис. 119

4. Операції над множинами. Над множинами можна виконувати певні дії: знаходити їх переріз, об'єднання, різницю. Дамо означення цих операцій і проілюструємо їх за допомогою кругів.

Перерізом множин $\boldsymbol{A}$ **і** $\boldsymbol{B}$ **називаюсь їхню спільну частину, тобто множину** $\boldsymbol{C}$ **усіх елементів, що належать як множині** $\boldsymbol{A}$**, так і множині** $\boldsymbol{B}$**.**

Переріз множин позначають знаком $\cap$ (на рисунку 120 наведено ілюстрацію і символічний запис означення перерізу множин).

Наприклад, якщо $A = \{2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$, то $A \cap B = \{2;\ 4\}$.

Об'єднанням множин $\boldsymbol{A}$ **і** $\boldsymbol{B}$ **називають множину** $\boldsymbol{C}$**, складену з усіх елементів, що належать хоча б одній із цих множин (*A або B*).**

Об'єднання множин позначають знаком $\cup$ (на рисунку 121 наведено ілюстрацію і символічний запис означення об'єднання множин).

Наприклад, для множин A і B із попереднього прикладу

$$A \cup B = \{0;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6\}.$$

Якщо позначити множину ірраціональних чисел через M, то $M \cup \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{R}$.

Різницею множин $\boldsymbol{A}$ **і** $\boldsymbol{B}$ **називається множина** $\boldsymbol{C}$**, яка складається з елементів, які належать множині** $\boldsymbol{A}$ **і не належать множині** $\boldsymbol{B}$**.**

Різницю множин позначають знаком $\setminus$. На рисунку 122 наведено ілюстрацію і символічний запис означення різниці множин.

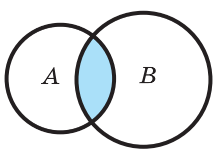
Наприклад, якщо $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, то $A \setminus B = \{1\}$, а $B \setminus A = \{4;\ 5\}$.

Якщо B — підмножина A, то різницю $A \setminus B$ називають *доповненням множини B до множини A* (рис. 123).

Наприклад, якщо знову позначити множину ірраціональних чисел через M, то $\boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Q} = M$: говорять, що множина M ірраціональних чисел доповнює множину $\boldsymbol{Q}$ раціональних чисел до множини $\boldsymbol{R}$ всіх дійсних чисел.

Всі множини, які ми розглядаємо, є підмножинами якоїсь так званої *універсальної множини U*. Її звичайно зображають у вигляді прямокутника, а всі інші множини — кругами всередині цього прямокутника (рис. 124). Різниця $U \setminus A$ називається доповненням множини A.

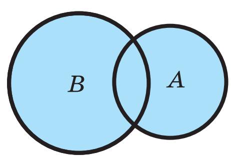
$\boldsymbol{A \cap B}$



$C = A \cap B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ і $x \in B$

Рис. 120

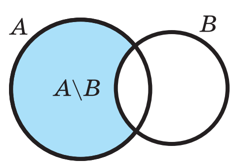
$\boldsymbol{A \cup B}$



$C = A \cup B$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A$ або $x \in B$

Рис. 121

$\boldsymbol{A \setminus B}$



$x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ і $x \notin B$

Рис. 122

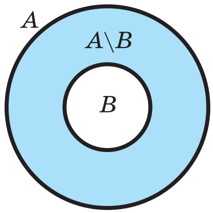


Рис. 123

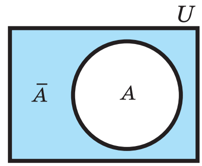


Рис. 124

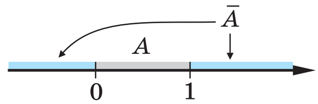


Рис. 125

Доповненням множини A називається множина, яка складається з усіх елементів, які не належать множині A.
(але які належать універсальній множині U).

Доповнення множини A позначається $\overline{A}$ (можна читати: «A з рискою»).

Наприклад, якщо $U = \boldsymbol{R}$ і $A = [0;\ 1]$, то $\overline{A} = (-\infty;\ 0) \cup (1;\ +\infty)$. (Для цього прикладу зручно використати традиційну ілюстрацію множини дійсних чисел на числовій прямій — рис. 125.)

Запитання для контролю

1. Наведіть приклади множин, укажіть декілька елементів кожної множини.
2. Як позначаються порожня множина, множини натуральних, цілих, раціональних, дійсних чисел?
3. Дайте означення рівності множин. Наведіть приклади двох рівних множин.
4. Дайте означення підмножини. Наведіть приклади. Проілюструйте це поняття за допомогою кругів.
5. Дайте означення перерізу, об'єднання, різниці двох множин. Наведіть приклади. Проілюструйте за допомогою кругів.
6. Поясніть, що називається доповненням однієї множини до іншої. Доповненням множини? Наведіть приклади. Проілюструйте ці поняття за допомогою відповідних рисунків.

Вправи

1°. Запишіть за допомогою фігурних дужок множину:
1) букв у слові «алгебра»; 2) парних однозначних натуральних чисел; 3) непарних однозначних натуральних чисел; 4) однозначних простих чисел.

2°. За якою характеристичною властивістю записані такі множини:
1) {понеділок, вівторок, середа, четверг, п'ятниця, субота, неділя};
2) {січень, лютий, березень, квітень, травень, червень, липень, серпень, вересень, жовтень, листопад, грудень};
3) {Австралія, Азія, Америка, Антарктида, Африка, Європа};
4) {до, ре, мі, фа, соль, ля, сі};
5) {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

3°. Наведіть приклади порожніх множин.

4°. A — множина натуральних чисел, які розміщені між числами 15 і 35. Запишіть множину A за допомогою фігурних дужок. Які з чисел 18, 28, 36, 40 належать множині A? Відповідь запишіть за допомогою знаків $\in$ і $\notin$.

5°. Запишіть за допомогою фігурних дужок і позначте множину:
1) натуральних дільників числа 12;
2) натуральних дільників числа 30;
3) цілих дільників числа 6;
4) простих дільників числа 12.

6°. Відомо, що $M = \{1; 2; 5\}$, $N = \{1; 4; 5; 7; 9\}$, $K = \{4; 7; 9\}$. Запишіть за допомогою фігурних дужок або знака $\varnothing$:
1) переріз M і N; 2) переріз M і K; 3) переріз N і K; 4) об'єднання M і N; 5) об'єднання M і K; 6) об'єднання N і K; 7) різницю M і N; 8) різницю M і K; 9) різницю N і K; 10) доповнення K до N.

7°. Поясніть, чому виконується рівність:
1) $A \cup \varnothing = A$; 2) $A \cup A = A$; 3) $A \cap \varnothing = \varnothing$; 4) $A \cap A = A$.

8°. Запишіть множину всіх двоцифрових чисел, які можна записати за допомогою цифр 0, 1, 3.

9°. Відомо, що A — множина натуральних дільників числа 12, а B — множина цілих дільників числа 6. Запишіть множину:
1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A \setminus B$; 4) $B \setminus A$.

10*. Нехай A і B — деякі множини. Доведіть рівність множин і проілюструйте її за допомогою кругів Ейлера–Венна:
1) $A \cup B = B \cup A$ — *переставний закон для об'єднання*;
2) $A \cap B = B \cap A$ — *переставний закон для перерізу*.

11. В одній множині 40 різних елементів, а в другій — 30. Скільки елементів може бути в їх: 1) перерізі; 2) об'єднанні.

12*. Нехай A, B, C — деякі множини. Доведіть рівність множин і проілюструйте її за допомогою кругів Ейлера–Венна:
1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — *сполучний закон для об'єднання*;
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ — *сполучний закон для перерізу*;
3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — *розподільні закони*;
5) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
6) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ — *закони де Моргана*.

13. Кожний учень у класі вивчає англійську або французьку мову. Англійську мову вивчають 25 учнів, французьку — 27 учнів, а ту й іншу одночасно — 18 учнів. Скільки учнів у класі?

14*. Частина жителів міста вміє розмовляти тільки українською мовою, частина — тільки російською, а частина вміє розмовляти обома мовами. Українською мовою розмовляє 95 % жителів, а російською — 85 %. Скільки відсотків жителів міста розмовляє обома мовами?

15*. Доведіть рівність множин і проілюструйте її за допомогою кругів Ейлера–Венна:
1) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; 2) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$.

16*. Запишіть множину всіх правильних дробів $\frac{a}{b}$, де $a \in A$, $b \in B$ і $A = \{2; 3; 4; 6\}$, $B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$.

17*. Які тризначні числа можна записати, якщо:
$A = \{3; 1; 2\}$ — множина цифр для позначення сотень;
$B = \{2; 8\}$ — множина цифр для позначення десятків;
$C = \{5; 7\}$ — множина цифр для позначення одиниць.
Скільки таких чисел одержимо? Спробуйте сформулювати загальне правило підрахунку кількості таких чисел, якщо в множині A — m елементів ($0 \notin A$), B — n елементів, C — k елементів.

§18 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ І БІНОМ НЬЮТОНА

18.1. Елементи комбінаторики

Таблиця 22

Комбінаторика
Комбінаторика — розділ математики, в якому вивчаються способи вибору і розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов. Вибрані (або вибрані і розміщені) групи елементів називають *сполуками*. Якщо всі елементи заданої впорядкованої множини різні — дістаємо перестановки без повторень, а якщо в заданій упорядкованій множині елементи повторюються, то дістанемо перестановки з повтореннями*.
Перестановки
Перестановкою з n елементів **називається будь-яка впорядкована множина з** n **елементів.** Інакше кажучи, це така *множина, для якої указано, який елемент знаходиться на першому місці, який — на другому, ..., який — на n-му*).

* Формули для знаходження кількості сполук з повтореннями є обов'язковими тільки для класів фізико-математичного профілю.

Продовж. табл. 22

Формула числа перестановок (P_n)	Приклад
$(P_n) = n!$, де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$ (читається: «Ен факторіал»)	Кількість різних шестизначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторюючи ці цифри в одному числі, дорівнює $P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$
Розміщення	
Розміщенням з n елементів по k **називається будь-яка впорядкована множина з *k* елементів, складена з елементів *n*-елементної множини**	
Формула числа розміщень $\left(A_n^k\right)$	Приклад
$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	Кількість різних тризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри не можуть повторюватися, дорівнює $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120.$
Комбінації	
Комбінацією без повторень з n елементів по k **називається будь-яка *k*-елементна підмножина *n*-елементної множини**	
Формула числа комбінацій $\left(C_n^k\right)$	Приклад
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (за означенням вважають, що $C_n^0 = 1$)	Із класу, що складається з 25 учнів, можна виділити 5 учнів для чергування по школі C_{25}^5 способами, тобто $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5!-20!} = \frac{21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53\,130$ способами.
Деякі властивості числа комбінацій без повторень	
$C_n^k = C_n^{n-k}$ (зокрема, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

Продовж. табл. 22

Схема розв'язування комбінаторних задач	
Вибір правила	
Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то **A або B** можна вибрати **$(m+n)$** способами.	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то **A і B** можна вибрати **$(m \cdot n)$** способами.
Вибір формули	

Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?

Так → Чи усі елементи входять до сполуки? (Так → Перестановки; Ні → Розміщення)

Ні → Комбінації

Перестановки		Розміщення		Комбінації	
без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями
$P_n = n!$	$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Пояснення й обґрунтування

18.1.1. Правило суми і добутку. Впорядковані множини. Розміщення

1. Поняття сполуки. Правило суми і добутку. При розв'язуванні багатьох практичних задач доводиться вибирати з певної сукупності об'єктів елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку і т. д. Оскільки в таких задачах йдеться про ті або інші комбінації об'єктів, то такі задачі називають *комбінаторними*. Розділ математики, у якому розглядаються методи розв'язування комбінаторних задач, називається *комбінаторикою*. У комбінаториці розглядається вибір і розміщення елементів деякої скінченної множини на основі якихось умов.

Вибрані (або вибрані і розміщені) групи елементів називають *сполуками*. Якщо всі елементи сполуки різні, то одержуємо сполуки без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то одержуємо сполуки з повтореннями. В цьому параграфі ми розглянемо сполуки без повторень, а сполуки з повтореннями розглянуті в § 21.

В основі розв'язування багатьох комбінаторних задач лежать два основних правила — правило суми і правило добутку.

Правило суми. Якщо на тарілці лежить 5 груш і 4 яблука, то вибрати один фрукт (тобто грушу або яблуко) можна 9 способами ($5 + 4 = 9$). У загальному виді має місце таке твердження:

Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то A *або* B можна вибрати $(m + n)$ способами.

Правило добутку. Якщо в кіоску продають ручки 5 видів і зошити 4 видів, то вибрати набір з ручки і зошита (тобто пару — ручка і зошит) можна $5 \cdot 4 = 20$ способами (оскільки до кожної з 5 ручок можна взяти будь-який із 4 зошитів). У загальному виді має місце таке твердження:

Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то A і B можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.

Це твердження означає, що оскільки для кожного з m елементів A можна взяти в пару будь-який з n елементів B, то кількість пар дорівнює добутку $m \cdot n$.

Повторюючи наведені міркування декілька разів (чи більш строго — використовуючи метод математичної індукції), одержуємо, що правила суми і добутку можна застосовувати при виборі довільної скінченної кількості елементів.

Отже, якщо доводиться вибирати **або перший елемент, або другий, або третій і т. д. елемент,** кількості способів вибору кожного елементу **додають,** а коли доводиться вибирати набір, у який входить **і перший, і другий, і третій, і т. д. елементи,** кількості способів вибору кожного елементу **перемножають**.

2. Впорядковані множини. При розв'язуванні комбінаторних задач доводиться розглядати не тільки множини, у яких елементи можна записувати в будь-якому порядку (як це ми робили в § 17), а й так звані впорядковані множини. Для впорядкованих множин суттєвим є порядок слідування їх елементів, тобто те, який елемент записано на першому місці, який на другому і т. д. Зокрема, якщо одні й ті самі елементи записати в різному порядку, то отримаємо різні упорядковані множини. Щоб відрізнити запис впорядкованої множини від невпорядкованої, елементи впорядкованої множини часто записують у круглих дужках, наприклад $(1; 2; 3) \neq (1; 3; 2)$.

Розглядаючи впорядковані множини, слід враховувати, що впорядкованість не є властивістю самої невпорядкованої множини (з якої ми одержали впорядковану), оскільки одну й ту саму множину можна по-різному впорядкувати (як кажуть математики, за допомогою різних відношень строгого чи не строгого порядку). Наприклад, множину з трьох чисел $\{-5; 1; 3\}$ можна впорядкувати за зростанням: (−5; 1; 3), за спаданням: (3; 1; – 5), за зростанням абсолютної величини числа: (1; 3; −5) і т. д.

Будемо розуміти, що для того *щоб задати скінченну впорядковану множину з n елементів, досить вказати, який елемент знаходиться на першому місці, який на другому, ..., який на n-му.*

3. Розміщення.

***Розміщенням з n елементів по k* називається будь-яка впорядкована множина з k елементів, складена з елементів n-елементної множини.**

Наприклад, із множини з трьох цифр {1; 5; 7} можна скласти такі розміщення з двох елементів без повторень:

(1; 5), (1; 7), (5; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).

Кількість розміщень з n елементів по k позначається A_n^k (читається: «A з n по k», A — перша літера французького слова *arrangement* — розміщення). Як бачимо, $A_3^2 = 6$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти розміщень з n елементів по k (без повторень). Складання розміщення уявимо собі як послідовне заповнення k місць, які ми будемо зображати у вигляді клітинок (див. рис. 126). На перше місце ми можемо вибрати один з n елементів заданої множини (тобто елемент для першої клітинки можна вибрати n способами).

Якщо елементи не можна повторювати, то на друге місце можна вибрати тільки один елемент із тих, що залишилися, тобто з $(n - 1)$. Тепер уже два елементи використані і на на третє місце можна вибрати тільки один з $(n - 2)$ елементів і т. д. На k-те місце можна вибрати тільки один з $n - (k - 1) = n - k + 1$ елементів (рис. 126).

Оскільки нам потрібно вибрати елементи і на перше місце, і на друге, ..., і на k-те, то використовуємо правило добутку і одержуємо таку **формулу числа розміщень з n елементів по k:**

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множників}}$$

Наприклад, $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$ (що співпадає з відповідним значенням, одержаним вище).

Аналогічно можна обґрунтувати формулу для знаходження числа розміщень з повтореннями (див. § 21).

При розв'язуванні найпростіших комбінаторних задач важливо правильно вибрати формулу, за якою будуть проводитися обчислення кількості сполук. Для цього досить з'ясувати таке:

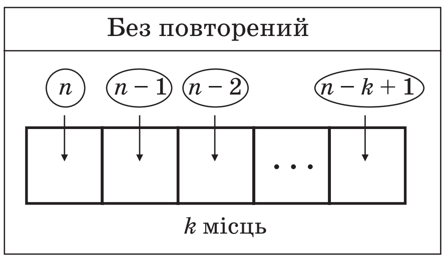


Рис. 126

— *Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?*

— *Чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки*?

Якщо, наприклад, порядок слідування елементів враховується і з n заданих елементів у сполуці використовується тільки k елементів, то за означенням — це розміщення з n елементів по k. Після визначення виду сполуки слід також з'ясувати, *чи можуть елементи в сполуці повторюватися*, тобто з'ясувати, яку формулу потрібно використати — для кількості сполук без повторень чи з повтореннями.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 На змагання з легкої атлетики приїхала команда з 12 спортсменок. Скількома способами тренер може визначити, хто з них побіжить в естафеті 4 × 100 м на першому, другому, третьому і четвертому етапах?

Розв'язання

▶ Кількість способів вибрати з 12 спортсменок чотирьох для участі в естафеті дорівнює кількості розміщень з 12 елементів по 4 (без повторень), тобто

$$A_{12}^4 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 = 11\,880. \quad \triangleleft$$

Коментар

Для вибору формули з'ясовуємо відповіді на питання, наведені вище. Оскільки для спортсменок важливо, у якому порядку вони будуть бігти, то порядок при виборі елементів враховується. До одержаної сполуки входять не всі 12 заданих елементів, отже, відповідна сполука — розміщення з 12 елементів по 4 (без повторень, оскільки кожна спортсменка може бігти тільки на одному етапі естафети).

Приклад 2 Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри в числі не повторюються.

Розв'язання

▶ Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, дорівнює числу розміщень з 7 елементів по 3. Тобто

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \quad \triangleleft$$

Коментар

Для вибору формули з'ясовуємо, що для чисел, які ми будемо складати, порядок враховується і не всі елементи вибираються (тільки 3 із заданих семи). Отже, відповідна сполука — розміщення з 7 елементів по 3 (без повторень).

Приклад 3* Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 0, якщо цифри в числі не повторюються.

Коментар

Вибір формули проводиться таким самим чином, як і в прикладі 2. Слід врахувати, що коли число, складене з трьох цифр, починається цифрою 0, то воно не вважається трицифровим. Отже, для відповіді на питання задачі можна спочатку з заданих 7 цифр утворити всі числа, що складаються з 3 цифр (див. приклад 2), а потім від кількості одержаних чисел відняти кількість тих чисел, які складені з трьох цифр, але починаються цифрою 0. В останньому випадку ми фактично будемо з усіх цифр без нуля (їх 6) складати двоцифрові числа. Тоді їх кількість дорівнює числу розміщень з 6 елементів по 2 (див. розв'язання).

Також можна виконати безпосереднє обчислення, послідовно заповнюючи три місця в трицифровому числі і використовуючи правило добутку. У цьому випадку зручно унаочнити міркування, зображаючи відповідні розряди в трицифровому числі у вигляді клітинок, наприклад так:

6 можливостей	6 можливостей	5 можливостей

Розв'язання

Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр (серед яких немає цифри 0), дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто A_7^3.
Але серед даних цифр є цифра 0, з якої не може починатися трицифрове число. Тому з розміщень із 7 елементів по 3 необхідно вилучити ті розміщення, у яких першим елементом є цифра 0. Їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2, тобто A_6^2. Отже, шукана кількість трицифрових чисел дорівнює

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180. \ \triangleleft$$

Приклад 4 Розв'яжіть рівняння $\frac{A_x^4}{A_x^2} = 6.$

Розв'язання

ОДЗ: $x \in N$, $x \geqslant 4$. Тоді одержуємо

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)} = 6.$$

На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянням:

Коментар

Рівняння, до запису яких входять вирази, що позначають кількість відповідних сполук із x елементів, вважаються означеними тільки при натуральних значеннях

$$(x-2)(x-3)=6,$$
$$x^2-5x=0,$$
$$x(x-5)=0.$$
Тоді $x=0$ або $x=5$.

Але до ОДЗ входить тільки $x=5$.

Відповідь: 5. ◁

змінної x. У даному випадку для існування виразу A_x^4 потрібно вибирати натуральне значення $x \geqslant 4$ (у цьому випадку A_x^2 теж існує і, звичайно, $A_x^2 \neq 0$). Для перетворення рівняння використовуємо відповідні формули:

$$A_x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3),$$
$$A_x^2 = x(x-1).$$

Запитання для контролю

1. Сформулюйте і поясніть на прикладах правило суми і правило добутку для розв'язування комбінаторних задач.
2. Поясніть, яка скінченна множина вважається впорядкованою. Наведіть приклади впорядкованих скінченних множин.
3. Поясніть, що називається розміщенням з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.
4. Запишіть формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.

5*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k без повторень.

Вправи

1°. Маємо 4 різні конверти без марок і 3 різні марки. Скількома способами можна вибрати конверт і марку для відправки листа?

2°. У коробці знаходиться 10 білих і 6 чорних куль.
1) Скількома способами з коробки можна витягти одну кулю будь-якого кольору?
2) Скількома способами з коробки можна витягти дві різнокольорові кулі?

3. У корзині лежать 12 яблук і 9 апельсинів (всі різні). Петрик вибирає або яблуко, або апельсин, після чого Надійка вибирає з тих фруктів, що залишилися, і яблуко і апельсин. Скільки можливо таких виборів? При якому виборі Петрика у Надійки більше можливостей вибору?

4. Учневі потрібно скласти 4 екзамени протягом 8 днів. Скількома способами може бути складений розклад його екзаменів?

5. Скількома способами може розміститися родина з трьох осіб у чотиримісному купе, якщо інших пасажирів у купе немає?

6. З 30 учасників зборів треба вибрати голову і секретаря. Скількома способами це можна зробити?

7. Скількома способами можуть зайняти перше, друге і третє місця 8 учасниць фінального забігу на дистанції 100 м?

8. Скількома способами можна виготовити трикольоровий прапор з горизонтальними смугами, якщо є матеріал 7 різних кольорів?

9. Скількома способами організатори конкурсу можуть визначити, хто з 15 його учасників буде виступати першим, другим і третім?

10. На площині відмітили 5 точок. Їх потрібно позначити латинськими буквами. Скількома способами це можна зробити (у латинському алфавіті 26 букв)?

11. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7, 9, якщо цифри в числі не повторюються?

12*. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо цифри в числі не повторюються?

13. Скільки існує семицифрових телефонних номерів, у яких усі цифри різні і перша цифра відмінна від нуля?

14. Скільки різних трицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб одержані числа були: 1) парними; 2) кратними 5?

15*. Розв'яжіть рівняння: 1) $A_x^2 = 20$; 2) $\frac{A_x^5}{A_x^3} = 6$.

18.1.2. Перестановки

Пояснення й обґрунтування

Перестановкою з n елементів **називається будь-яка впорядкована множина з *n* елементів.**

Нагадаємо, що впорядкована множина — це така *множина, для якої указано, який елемент знаходиться на першому місці, який на другому, ..., який на n-му*.

Наприклад, переставляючи цифри в числі 236 (там множина цифр {2; 3; 6} уже впорядкована), можна скласти такі *перестановки без повторень*: (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2) — всього 6 перестановок*.

Кількість перестановок без повторень з *n* елементів позначається P_n (*P* — перша літера французького слова *permutation* — перестановка). Як бачимо, $P_3 = 6$.

Фактично перестановки без повторень з *n* елементів є розміщеннями з *n* елементів по *n* без повторень, тому $P_n = A_n^n = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ множників}}$. Добуток $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ позначається $n!$. Тому одержана **формула числа перестановок без повторень з *n* елементів** може бути записана так:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

* Відзначимо, що кожна така перестановка визначає трицифрове число, складене з цифр 2, 3, 6 так, що цифри в числі не повторюються.

Наприклад, $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ (що співпадає з відповідним значенням, одержаним вище).

За допомогою факторіалів формулу для числа розміщень без повторень

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множників}} \qquad (1)$$

можна записати в іншому вигляді. Для цього помножимо і поділимо вираз у формулі (1) на добуток $(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (n-k)!$. Одержуємо

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Отже, **формула для числа розміщень без повторень з n елементів по k** може бути записана так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (2)$$

Для того щоб цією формулою можна було користуватися при всіх значеннях k і, зокрема при $k = n - 1$ та при $k = n$, домовилися вважати, що

$1! = 1$ і $0! = 1$.

Наприклад, за формулою (2) $A_6^5 = \frac{6!}{(6-5)!} = \frac{6!}{1!} = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$

Зауважимо, що в тих випадках, коли значення $n!$ виявляється дуже великим, відповіді залишають записаними за допомогою факторіалів. Наприклад, $A_{30}^{25} = \frac{30!}{(30-25)!} = \frac{30!}{5!}$.

Приклади розв'язання завдань

Нагадаємо, що для вибору формули при розв'язуванні найпростіших комбінаторних задач досить з'ясувати відповіді на питання:

— *Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?*

— *Чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Якщо, наприклад, порядок слідування елементів враховується і всі n заданих елементів використовуються в сполуці, то за означенням це перестановки з n елементів.

Приклад 1 Знайдіть, скількома способами можна вісім учнів вишикувати в колону по одному.

Розв'язання	Коментар
▶ Кількість способів дорівнює числу перестановок з 8 елементів. Тобто $P_8 = 8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320$. ◁	Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на питання, наведені вище. Оскільки порядок слідування елементів враховується і всі 8 заданих елементів вибирають-

ся, то відповідні сполуки — це перестановки з 8 елементів (без повторень). Їх кількість можна обчислити за формулою

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Приклад 2 Знайдіть кількість різних чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 0, 3, 7, 9 (цифри в числі не повторюються).

Розв'язання

▶ З чотирьох цифр 0, 3, 7, 9 можна одержати P_4 перестановок. Але ті перестановки, які починаються з 0, не будуть записом чотирицифрового числа — їх кількість P_3. Тоді шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює

$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 3 =$
$= 18.$ ◁

Коментар

Оскільки порядок елементів враховується і для одержання чотирицифрового числа потрібно використати всі елементи, то потрібна сполука — це перестановки з 4 елементів. Їх кількість — P_4. Але ще потрібно врахувати, що в чотирицифровому числі на першому місці не може стояти цифра 0. Таких чисел буде стільки, скільки разів ми зможемо виконати перестановки з 3 цифр, які залишилися, тобто P_3.

Приклад 3* Є десять книг, з яких чотири — підручники. Скількома способами можна поставити ці книги на полицю так, щоб усі підручники стояли разом?

Розв'язання

▶ Спочатку будемо розглядати підручники як одну книгу. Тоді на полиці потрібно розставити не 10, а 7 книг. Це можна зробити P_7 способами. У кожному з одержаних наборів книг ще можна виконати P_4 перестановок підручників. За правилом множення шукана кількість способів дорівнює

$P_7 \cdot P_4 = 7! \cdot 4! = 5040 \cdot 254=$
$= 120\,960.$ ◁

Коментар

Задачу можна розв'язувати у два етапи. На першому етапі умовно будемо вважати всі підручники за 1 книгу. Тоді одержимо 7 книг (6 не підручників + 1 умовна книга — підручник). Порядок елементів враховується, і використовуються всі елементи (поставити на полицю потрібно всі книги), отже, відповідна сполука — це перестановки з 7 елементів. Їх кількість — P_7.

На другому етапі розв'язування будемо переставляти між собою тільки підручники. Це можна зробити P_4 способами. Оскільки нам потрібно переставити і підручники, і інші книги, то використовуємо правило добутку.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається перестановкою з n елементів (без повторень). Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа перестановок з n елементів без повторень. Наведіть приклади її використання.

3*. Обгрунтуйте формулу для обчислення числа перестановок з n елементів без повторень.

Вправи

1. Скількома способами 4 чоловіки можуть розміститися на чотиримісному ослоні?

2. Кур'єр повинен рознести пакети в 7 різних установ. Скільки маршрутів може він вибрати?

3. Скільки існує виразів, тотожно рівних добутку $abcde$, що одержуються з нього перестановкою множників?

4. Ольга пам'ятає, що телефон подруги закінчується цифрами 5, 7, 8, але забула, у якому порядку ці цифри розміщено. Укажіть найбільше число варіантів, що їй доведеться перебрати, щоб додзвонитися подрузі.

5. Скільки шестицифрових чисел (без повторення цифр) можна скласти з цифр:
1) 1, 2, 5, 6, 7, 8; 2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

6. Скільки серед чотирицифрових чисел, складених з цифр 3, 5, 7, 9 (без повторення цифр), є таких, що:
1) починаються з цифри 3; 2) кратні 5?

7. Знайдіть суму цифр усіх чотирицифрових чисел, які можна скласти з цифр 1, 3, 5, 7 (без повторення цифр у числі).

8. У розкладі на понеділок шість уроків: алгебра, геометрія, іноземна мова, історія, фізкультура, хімія. Скількома способами можна скласти розклад уроків на цей день так, щоб два уроки математики стояли підряд?

9*. Скількома способами можна розставити на полиці 12 книг, з яких 5 книг — це збірники віршів, так, щоб збірники віршів стояли поруч у довільному порядку?

10. Знайдіть, скількома способами 5 хлопчиків і 5 дівчаток можуть зайняти в театрі в одному ряді місця з 1 по 10. Скількома способами вони можуть це зробити, якщо хлопчики будуть сидіти на непарних місцях, а дівчатка — на парних?

18.1.3. Комбінації

Пояснення й обґрунтування

1. Комбінації без повторень.

Комбінацією без повторень з n елементів по k називається будь-яка k-елементна підмножина n-елементної множини.

Наприклад, з множини $\{a, b, c, d\}$ можна скласти такі комбінації без повторень з трьох елементів: $\{a, b, c\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$.

Кількість комбінацій без повторень з n елементів по k позначається символом $\boldsymbol{C_n^k}$ (читається: «Число комбінацій із n по k» або «це із n по k», C — перша літера французького слова *combinaison* — комбінація). Як бачимо, $C_4^3 = 4$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій без повторень з n елементів по k. Для цього використаємо відомі нам формули числа розміщень і перестановок.

Складання розміщення без повторень з n елементів по k проведемо в два етапи. Спочатку виберемо k різних елементів із заданої n-елементної множини, не враховуючи порядок вибору цих елементів (тобто виберемо k-елементну підмножину з n-елементної множини — комбінацію без повторень з n-елементів по k). За нашим позначенням це можна зробити C_n^k способами. Після цього одержану множину з k різних елементів впорядкуємо. Її можна впорядкувати $P_k = k!$ способами. Одержимо розміщення без повторень з n елементів по k. Отже, кількість розміщень без повторень з n елементів по k в $k!$ разів більша за число комбінацій без повторень з n елементів по k. Тобто $A_n^k = C_n^k \cdot k!$. Звідси $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. Враховуючи, що за формулою (2) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, одержуємо

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (3)$$

Наприклад, $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$, що співпадає із значенням, одержаним вище.

Використовуючи формулу (3), легко обґрунтувати *властивість* 1 *числа комбінацій без повторень*, наведену в таблиці 21 (с. 233).

1) Оскільки $C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = C_n^k$, то

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Для того щоб формулу (4) можна було використовувати і при $k = n$, домовилися вважати, що $C_n^0 = 1$. Тоді за формулою (4) $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Якщо у формулі (3) скоротити чисельник і знаменник на $(n-k)!$, то дістанемо формулу, за якою зручно обчислювати C_n^k при малих значеннях k:

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k\text{ множників}}}{k!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}^{k\text{ множників}}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}_{k\text{ множників}}}. \qquad (5)$$

Наприклад, $C_{25}^2 = \frac{\overbrace{25\cdot 24}^{2\text{ множники}}}{1\cdot 2} = 25\cdot 12 = 300$, $C_8^3 = \frac{\overbrace{8\cdot 7\cdot 6}^{3\text{ множники}}}{1\cdot 2\cdot 3} = 8\cdot 7 = 56$.

2. Обчислення числа комбінацій без повторень за допомогою трикутника Паскаля. Для обчислення числа комбінацій без повторень можна користуватися формулою (3): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, а можна організувати послідовне обчислення відповідних значень, користуючись такою властивістю:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}. \qquad (6)$$

Для обґрунтування рівності (6) знайдемо суму $C_n^k + C_n^{k+1}$, враховуючи, що $(k+1)! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k\cdot(k+1) =$

$= k!\,(k+1)$ і $(n-k)! = 1\cdot 2\cdot\ldots$

$\ldots\cdot(n-k-1)\cdot(n-k) = (n-k-1)!\,(n-k)$.

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} +$$

$$+\frac{n!}{k!(k+1)(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}.$$

Але $C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$, отже, $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

Ця рівність дозволяє послідовно обчислювати значення C_n^k за допомогою спеціальної таблиці, яка називається *трикутником Паскаля*. Якщо вважати, що $C_0^0 = 1$, то ця таблиця буде мати такий вигляд (табл. 23).

Кожний рядок цієї таблиці починається з одиниці і закінчується одиницею $\left(C_n^0 = C_n^n = 1\right)$.

Якщо якийсь рядок вже записано, наприклад, третій, то в четвертому рядку потрібно записати на першому місці одиницю. На другому місці записуємо число, яке дорівнює сумі двох чисел третього рядка, які стоять над ним ліворуч і праворуч (оскільки за формулою (6) $C_4^1 = C_3^0 + C_3^1 = 1+3 = 4$). На тре-

Таблиця 23

Значення C_n^k								
n \ k	0	1	2	3	4	5	6	…
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
…			•	•	•			
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^3	C_n^4	C_n^5	C_n^6	…

тьому місці записуємо число, яке дорівнює сумі двох наступних чисел третього рядка, які стоять над ним ліворуч і праворуч $\left(C_4^2 = C_3^1 + C_3^2 = 3 + 3 = 6\right)$, і т. д. (а на останньому місці знову записуємо одиницю).

Приклади розв'язання завдань

Зауважимо, що, як і раніше, для вибору формули при розв'язуванні найпростіших комбінаторних задач досить з'ясувати відповіді на питання:

— *Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?*

— *Чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки*?

Але для з'ясування того, що задана сполука є комбінацією, досить відповісти тільки на перше запитання (див. схему в таблиці 22 на с. 233). Якщо порядок слідування елементів не враховується, то за означенням це комбінації з n елементів по k.

Приклад 1 З 12 членів туристичної групи потрібно вибрати трьох чергових. Скількома способами можна виконати цей вибір?

Розв'язання

Кількість способів вибрати з 12 туристів трьох чергових дорівнює кількості комбінацій з 12 елементів по 3 (без повторень), тобто

$$C_{12}^3 = \frac{12!}{3!\cdot(12-3)!} = \frac{12!}{3!\cdot 9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 220.$$

Коментар

Для вибору відповідної формули з'ясовуємо відповіді на питання, наведені вище. Оскільки порядок слідування елементів не враховується (для чергових не важливо, у якому порядку їх виберуть), то відповідна сполука є комбінацією з 12 елементів по 3 (без повторень). Для обчислення можна використати формули (3) або (5), у даному випадку застосували формулу (3): $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Приклад 2 З вази з фруктами, у якій лежить 10 різних яблук і 5 різних груш, потрібно вибрати 2 яблука і 3 груші. Скількома способами можна виконати такий вибір?

Розв'язання

Вибрати 2 яблука з 10 можна C_{10}^2 способами. При кожному виборі яблук груші можна вибрати C_5^3 способами. Тоді за правилом добутку вибір потрібних фруктів можна виконати $C_{10}^2\cdot C_5^3$ способами. Одержуємо:

$$C_{10}^2\cdot C_5^3 = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 450.$$

Коментар

Спочатку окремо виберемо 2 яблука з 10 і 3 груші з 5. Оскільки при виборі яблук чи груш порядок слідування елементів не враховується, то відповідні сполуки — комбінації без повторень.

Враховуючи, що потрібно вибрати і 2 яблука, і 3 груші, використовуємо правило добутку і перемножуємо одержані можливості вибору яблук (C_{10}^2) і груш (C_5^3).

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається комбінаціями з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k без повторень. Наведіть приклади її використання.
3*. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k без повторень.
4*. Обґрунтуйте властивість $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$.

5*. Поясніть, як можна послідовно обчислювати значення C_n^k за допомогою спеціальної таблиці — трикутника Паскаля.

6. Поясніть на прикладах, як можна вибирати відповідну формулу при розв'язуванні найпростіших комбінаторних задач.

Вправи

1°. У класі 7 чоловік успішно займаються математикою. Скількома способами можна вибрати з них двох для участі в математичній олімпіаді?

2°. У магазині «Філателія» продається 8 різних наборів марок, присвячених спортивній тематиці. Скількома способами можна вибрати з них 3 набори?

3°. Учням дали список з 10 книг, що рекомендується прочитати під час канікул. Скількома способами учень може вибрати з них 6 книг?

4. На полиці стоїть 12 книг: англо-український словник і 11 художніх творів англійською мовою. Скількома способами читач може вибрати 3 книги, якщо:
1) словник потрібний йому обов'язково; 2) словник йому не потрібний?

5°. У класі навчаються 16 хлопчиків і 12 дівчат. Для прибирання території потрібно виділити чотирьох хлопчиків і трьох дівчат. Скількома способами це можна зробити?

Розв'яжіть вправи **6–26**, *використовуючи відомі вам формули і правила комбінаторики.*

6. Під час зустрічі 16 осіб потисли один одному руки. Скільки всього зроблено рукостискань?

7. Група учнів з 30 осіб вирішила обмінятися фотокартками. Скільки всього фотокарток потрібно було для цього?

8°. Скільки перестановок можна зробити з букв слова «Харків»?

9°. Бригадир повинен відрядити на роботу бригаду з 5 осіб. Скільки бригад по 5 осіб у кожній можна утворити з 12 осіб?

10. Скількома різними способами збори, що складаються з 40 осіб, можуть обрати із свого числа голову зборів, його заступника і секретаря?

11. Скільки прямих ліній можна провести через 8 точок, з яких ніякі три не лежать на одній прямій?

12. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 без їх повторень?

13. Визначити число всіх діагоналей правильного: 1) п'ятикутника; 2) восьмикутника; 3) дванадцятикутника; 4) п'ятнадцятикутника.

14°. Скільки різних трикольорових прапорів можна зробити, комбінуючи синій, червоний і білий кольори?

15. Скільки різних площин можна провести через 10 точок, якщо ніякі три з них не лежать на одній прямій і ніякі чотири точки точки не лежать на одній площині?

16*. Скільки різних п'ятицифрових чисел можна написати за допомогою цифр 0, 2, 4, 6, 8 без їх повторень?

17. Серед перестановок з цифр 1, 2, 3, 4, 5 скільки таких, що не починаються цифрою 5? числом 12? числом 123?

18. Серед комбінацій з 10 букв a, b, c, ... по 4 скільки таких, що не містять букви a? букв a і b?

19. Серед розміщень з 12 букв a, b, c, ... по 5 скільки таких, що не містять букви a? букв a і b?

20. Скільки треба взяти елементів, щоб число розміщень з них по чотири було у 12 разів більшим, ніж число розміщень з них по 2?

Розв'яжіть рівняння **(21–25)**.

21. 1) $A_x^2 = 42$; 2) $A_x^3 = 56x$; 3) $A_{x+1}^2 = 30$; 4) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$.

22. 1) $C_{x-3}^2 = 21$; 2) $C_x^3 = \dfrac{5x(x-3)}{4}$; 3) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$; 4) $C_x^4 = \dfrac{15A_x^2}{4}$.

23. 1) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$; 2) $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$; 3) $12C_x^1 + C_{x+4}^2 = 162$; 4) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3A_x^3}{8}$.

24. 1) $\dfrac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; 2) $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$; 3) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$; 4) $\dfrac{A_{x+2}^{n+2} P_{x-n}}{P_x} = 110$.

25. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 10, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} C_x^{y+1} = 2{,}5x, \\ C_{x-1}^y = 10; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} C_x^y : C_x^{y+2}, \\ C_x^2 = 153; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} A_x^y : A_x^{y-1} = 8, \\ C_x^y : C_x^{y-1} = 1{,}6. \end{cases}$

18.2. Біном Ньютона

Таблиця 24

Біном Ньютона
$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1} a x^{n-1} + x^n$ Оскільки $1 = C_n^0 = C_n^n$ і $x^0 = 1$, $a^0 = 1$ (при $x \neq 0$ і $a \neq 0$), то формулу бінома Ньютона можна записати ще й так: $(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n a^0 x^n$ **Загальний член** розкладу степеня бінома має вигляд $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k$ (де $k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Коефіцієнти C_n^k називають **біноміальними коефіцієнтами**

Продовж. табл. 24

Властивості біноміальних коефіцієнтів
1. **Число біноміальних коефіцієнтів** (а отже, і число доданків у розкладі n-го степеня бінома) **дорівнює $n + 1$.** 2. **Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу, рівні між собою** (оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$). 3. **Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n:** $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n$. 4. **Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях.** 5. Для обчислення біноміальних коефіцієнтів можна скористатися трикутником Паскаля, у якому обчислення коефіцієнтів ґрунтується на формулі $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

Трикутник Паскаля

Степінь	Коефіцієнти розкладу	Орієнтир
$(a + x)^0$	1	*У кожному рядку по краях стоять одиниці, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним ліворуч і праворуч*
$(a + x)^1$	1 1	
$(a + x)^2$	1 2 1	
$(a + x)^3$	1 3 3 1	
$(a + x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a + x)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a + x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
...	...	

Наприклад, $(a + b)^4 = a^4 + 4\,a^3b + 6\,a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Пояснення й обґрунтування

1. Біном Ньютона. Двочлен виду $a + x$ також називають біномом. З курсу алгебри відомо, що:

$(a + x)^1 = a + x = 1 \cdot a + 1 \cdot x;$

$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot ax + 1 \cdot x^2;$

$(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = 1 \cdot a^3 + 3 \cdot a^2x + 3 \cdot ax^2 + 1 \cdot x^3.$

Можна помітити, що коефіцієнти розкладу степеня бінома $(a + x)^n$ при $n = 1, 2, 3$ співпадають з числами у відповідному рядку трикутника Паскаля.

Виявляється, що ця властивість виконується і для довільного натурального n, тобто правдива формула

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + C_n^3 a^{n-3} x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k} x^k + \ldots + C_n^n x^n. \qquad (7)$$

Формулу (7) називають *біномом Ньютона*. Права частина цієї рівності називається розкладом степеня бінома $(a + x)^n$, а числа C_n^k (при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$) називають *біноміальними коефіцієнтами*. **Загальний член розкладу** степеня бінома має вигляд

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} x^k \text{ (де } k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Обґрунтувати формулу (7) можна, наприклад, так.

Якщо розкрити дужки у виразі $(a + x)^n$, тобто помножити біном $a + x$ сам на себе n разів, то одержимо многочлен n-го степеня відносно змінної x. Тоді результат можна записати так:

$$(a + x)^n = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_k x^k + \ldots + A_n x^n. \qquad (8)$$

Щоб знайти значення A_0, підставимо в обидві частини рівності (8) замість x значення 0. Одержуємо $A_0 = a^n$, а враховуючи, що $C_n^0 = 1$, можна записати: $A_0 = a^n = C_n^0 a^n$.

Щоб знайти A_1, візьмемо похідну від обох частин рівності (8) і підставимо в обидві частини одержаної рівності $x = 0$. У результаті отримуємо рівності:

$$((a + x)^n)' = (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_k x^k + \ldots + A_n x^n)',$$

$$n(a + x)^{n-1} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + kA_k x^{k-1} + \ldots + nA_n x^{n-1} \qquad (9)$$

Підставляючи $x = 0$, знаходимо $na^{n-1} = A_1$. Враховуючи, що $C_n^1 = n$, можна записати: $A_1 = na^{n-1} = C_n^1 a^{n-1}$.

Аналогічно, щоб знайти A_2, візьмемо похідну від обох частин рівності (9) і підставимо $x = 0$. Одержуємо:

$$n(n-1)(a + x)^{n-2} = 2A_2 + 3 \cdot 2 \cdot A_3 x + \ldots + k(k-1)A_k x^{k-2} + \ldots + n(n-1)A_n x^{n-2}, \qquad (10)$$

звідки при $x = 0$ маємо $n(n-1)a^{n-2} = 2A_2$. Тоді

$$A_2 = \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} = C_n^2 a^{n-2}.$$

Інші коефіцієнти знаходяться таким самим чином. Якщо продиференціювати k разів рівність (8), то одержимо:

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)(a + x)^{n-k} = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1A_k + (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2A_{k+1} x + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)A_n x^{n-k}.$$

Підставляючи в останню рівність $x = 0$, маємо

$$n(n-1)\ldots(n-k+1)a^{n-k} = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1A_k. \qquad (11)$$

Таблиця 25

Степінь	Коефіцієнти розкладу	Орієнтир
$(a+x)^0$	1	*У кожному рядку по краях стоять одиниці, а кожне з решти чисел дорівнює сумі двох чисел, що знаходяться над ним ліворуч і праворуч*
$(a+x)^1$	1 1	
$(a+x)^2$	1 2 1	
$(a+x)^3$	1 3 3 1	
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1	
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1	
$(a+x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	
...	...	

Помножимо обидві частини рівності (11) на $(n-k)!$ і знайдемо $A_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k} = C_n^k a^{n-k}$. Підставляючи знайдені значення A_k (при $k=0$, $1, 2, \ldots, n$) у рівність (8), одержуємо рівність (7). ○

Записуючи степінь двочлена за формулою бінома Ньютона для невеликих значень n, біноміальні коефіцієнти можна обчислювати за трикутником Паскаля, який зручно записувати так (табл. 25, див. також табл. 24).

Наприклад, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

Враховуючи, що $C_n^0 = C_n^n = 1$, формулу бінома Ньютона можна записати також так:

$$(a+x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^{n-1}ax^{n-1} + x^n, \quad (12)$$

а враховуючи, що $x^0 = 1$ і $a^0 = 1$ (при $x \neq 0$ і $a \neq 0$), ще й так:

$$(a+x)^n = C_n^0 a^n x^0 + C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 + C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k}x^k + \ldots + C_n^n a^0 x^n. \quad (13)$$

Якщо в формулі бінома Ньютона замінити x на $(-x)$, то одержимо *формулу піднесення до степеня різниці* $a - x$. Зокрема, з формули (12) маємо

$$(a-x)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}x + C_n^2 a^{n-2}x^2 - C_n^3 a^{n-3}x^3 + \ldots + (-1)^n x^n.$$

Наприклад, $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ (знаки членів розкладу чергуються!).

2. Властивості біноміальних коефіцієнтів.

1. **Число біноміальних коефіцієнтів** (а отже, і число доданків у розкладі n-го степеня бінома) **дорівнює $n+1$,** оскільки розклад містить усі степені x від 0 до n (і інших доданків не містить).
2. **Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу, рівні між собою,** оскільки $C_n^k = C_n^{n-k}$.

3. **Сума всіх біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n.**

Для обґрунтування покладемо в рівності (13) (або в рівності (7)) значення $a = x = 1$ і одержуємо

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Наприклад, $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 32 = 2^5$.

4. **Сума біноміальних коефіцієнтів, що стоять на парних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, що стоять на непарних місцях.**

Для обґрунтування покладемо в рівності (13) значення $a = 1$, $x = -1$ і одержуємо

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \ldots + (-1)^n C_n^n.$$

Тоді

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots\,.$$

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 За формулою бінома Ньютона знайдіть розклад степеня $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$.

Коментар

Для знаходження коефіцієнтів розкладу можна використати трикутник Паскаля (с. 255) або обчислити їх за загальною формулою. За трикутником Паскаля коефіцієнти дорівнюють: 1; 6; 15; 20; 15; 6; 1. Враховуємо, що при піднесенні до степеня різниці знаки членів розкладу чергуються. Тоді

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6.$$

Для спрощення запису відповіді можна позбутися в одержаних виразах від ірраціональності в знаменниках (як це зроблено в розв'язанні) або з самого початку врахувати, що ОДЗ заданого виразу: $x > 0$ і тоді $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$. Отже, заданий вираз можна записати так: $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = \left(x - x^{-\frac{1}{2}}\right)^6$ і виконувати піднесення до степеня останнього виразу.

Розв'язання

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - 6x^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 15x^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 20x^3\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 + 15x^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 - 6x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5 +$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6 = x^6 - \frac{6x^5}{\sqrt{x}} + 15x^3 - \frac{20x^3}{x\sqrt{x}} + 15 - \frac{6}{x\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3} = x^6 - 6x^4\sqrt{x} + 15x^3 -$$

$$- 20x\sqrt{x} + 15 - \frac{6\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^3}.$$

Приклад 2 У розкладі $\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}$ знайдіть член, який містить b^3.

Р о з в ' я з а н н я

ОДЗ: $b > 0$. Тоді

$$\left(\sqrt{b}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^{16}=\left(b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{3}}\right)^{16}.$$

Загальний член розкладу:

$$T_{k+1}=C_{16}^{k}\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{16-k}\left(b^{-\frac{1}{3}}\right)^{k}=C_{16}^{k}b^{\frac{16-k}{2}-\frac{k}{3}}.$$

За умовою член повинен містити b^3, отже, $\frac{16-k}{2}-\frac{k}{3}=3.$ Звідси $k = 6$.

Тоді членом, що містить b^3, буде

$$T_{k+1}=T_7=C_{16}^{6}b^{\frac{16-6}{2}-\frac{6}{3}}=C_{16}^{6}b^3=\frac{16!}{6!(16-6)!}b^3=$$

$$=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=8008b^3.$$

К о м е н т а р

На ОДЗ ($b > 0$) кожен доданок у заданому двочлені можна записати як степінь з дробовим показником. Це дозволить простіше записати загальний член розкладу степеня $(a + x)^n$:

$$T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}x^k,$$

(де $k = 0, 1, 2, \ldots, n$), з'ясувати, який з членів буде містити b^3, і записати такий член.

Для спрощення запису загального члена зручно відзначити, що

$$a=\sqrt{b}=b^{\frac{1}{2}},\quad x=\frac{1}{\sqrt[3]{b}}=b^{-\frac{1}{3}},\quad n = 16.$$

Запитання для контролю

1. а) Запишіть формулу бінома Ньютона. Наведіть приклади її використання.
   б*) Доведіть формулу бінома Ньютона.
2*. Сформулюйте і доведіть властивості біноміальних коефіцієнтів.

Вправи

Знайдіть розклад степеня бінома **(1–3)**.

1. 1) $(x + a)^6$; 2) $(x + c)^4$; 3) $(x + 2)^5$; 4*) $(1 + a)^{12}$.

2. 1) $(x - a)^7$; 2) $(x^2 - a)^6$; 3) $(a^2 + 1)^8$; 4*) $\left(a+\sqrt{b}\right)^{11}$.

3. 1) $\left(\sqrt{m}-n\right)^5$; 2) $(x - 2y)^5$; 3) $(3x + 2y)^4$;
4) $(2a^2 - 3a)^5$; 5) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$.

4. Знайдіть:
1) четвертий член розкладу $(a + 3)^7$;
2) дев'ятий член розкладу $\left(a+\sqrt{b}\right)^{12}$;

3) шостий член розкладу $(a^2 + b^3)^{13}$;

4) середній член розкладу $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^8$.

5. Знайдіть член розкладу бінома:

1) $(x + y)^9$, що містить x^7;
2) $\left(\sqrt{a}+b\right)^9$, що містить a^3;

3) $\left(\sqrt{a}+\sqrt[4]{a}\right)^{20}$, що містить a^7;
4) $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[5]{x^8}\right)^{12}$, що містить $x^{\frac{22}{3}}$;

5) член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3}\right)^{17}$, що не містить a;

6) член розкладу $\left(\sqrt[3]{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$, що не містить a.

6*. Знайдіть показник степеня бінома, якщо:

1) третій член розкладу $\left(\sqrt[3]{a^2}+a^{-1}\right)^n$ містить a^0;

2) біноміальні коефіцієнти четвертого і шостого членів розкладу $(1 + x)^{n+1}$ рівні між собою;

3) біноміальні коефіцієнти четвертого і шостого членів розкладу відповідно дорівнюють 120 і 252.

7*. Знайдіть показник степеня бінома, якщо:

1) шостий член розкладу $\left(\sqrt[-30]{a}+\sqrt[5]{a}\right)^n$ не містить a;

2) відношення сьомого члена розкладу $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n$ до сьомого члена від кінця дорівнює $\frac{1}{6}$;

3) шостий член розкладу $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}-\sqrt[5]{a^3}\right)^n$ не залежить від a.

8*. У рокладі $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коефіцієнт п'ятого члена відноситься до коефіцієнта третього члена, як 7 : 2. Знайдіть той член цього розкладу, який містить букву x у першому степені.

9*. У розкладі $\left(\frac{1}{z}+\sqrt{z}\right)^n$ коефіцієнт четвертого члена відноситься до коефіцієнта шостого члена, як 5 : 18. Визначте той член цього розкладу, що не залежить від z.

10*. Коефіцієнт третього члена від кінця розкладу $\left(\sqrt[7]{z^{-1}}+\sqrt[3]{z^2}\right)^n$ дорівнює 45. Знайдіть член цього розкладу, що містить букву z у першому степені.

§19 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

19.1. Поняття випадкової події і випадкового експерименту. Статистичне означення імовірності

Таблиця 26

<table>
<tr><th colspan="2">1. Випадкові експерименти і випадкові події</th></tr>
<tr><th>Поняття</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td>Експериментами з випадковими результатами, чи коротше, випадковими експериментами, називають різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах.</td><td>Постріли по мішені, участь у лотереї, багаторічні спостереження за погодою в той самий день у тому самому місці, досліди з рулеткою, з підкиданням грального кубика, монети, кнопки і т. д.</td></tr>
<tr><td>Подія, яка може відбутися, а може і не відбутися в процесі спостереження або експерименту в одних і тих самих умовах, називається випадковою подією.
Будь-який результат випадкового експерименту є випадковою подією. Випадкові події позначають великими латинськими літерами A, B, C, D, ...</td><td>Випадання «герба», випадання «числа» при підкиданні монети; виграш у лотерею, випадання певної кількості очок при підкиданні грального кубика і т. д.</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Частота і відносна частота випадкової події</th></tr>
<tr><td>Якщо при незмінних умовах випадковий експеримент проведено n разів і в $n(A)$ випадків відбулася подія A, то число $n(A)$ називається частотою події A.

Відносною частотою випадкової події називають відношення числа появ цієї події до загального числа проведених експериментів, тобто відношення $\frac{n(A)}{n}$</td><td>Подія A — випадання «герба» при підкиданні монети.

<table>
<tr><th>Експериментатори</th><th>Учні</th><th>Бюффон[*]</th><th>Пірсон</th></tr>
<tr><td>Кількість експериментів n</td><td>8 000</td><td>4 040</td><td>24 000</td></tr>
<tr><td>Частота $n(A)$</td><td>3 962</td><td>2 048</td><td>12 012</td></tr>
<tr><td>Відносна частота</td><td>0,4953</td><td>0,5069</td><td>0,5005</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

[*] Жорж Луї де Бюффон (1707–1782) — французький математик і природознавець, Карл Пірсон (1857–1936) — англійський математик і біолог. Їх праці сприяли розвитку теорії імовірностей і математичної статистики.

Продовж. табл. 26

3. Статистичне означення імовірності	
Якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія A, значення відносної частоти близькі до деякого певного числа, то це число називається імовірністю випадкової події A і позначається $P(A)$. **$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$**	Подія A — випадання «герба» при підкиданні монети. $P(A) = 0,5$
4. Вірогідні і неможливі події	
Вірогідна подія — це подія U, яка обов'язково відбувається при кожному повторенні експерименту. **$P(U) = 1$**	Випадання менше 7 очок при підкиданні грального кубика (на гранях якого позначено від 1 до 6 очок).
Неможлива подія (її часто позначають $\varnothing$) — це подія, що у даному експерименті відбутися не може. **$P(\varnothing) = 0$**	Випадання 7 очок при підкиданні грального кубика.
5. Рівноможливі події	
Рівноможливі (рівноімовірні) події — це такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у з'явленні частіше інших при багаторазових експериментах, що проводяться в приблизно однакових умовах. **Імовірності рівноможливих подій однакові.**	В експерименті по одноразовому підкиданні однорідної монети правильної форми рівноможливими є події: A — випаде «герб», B — випаде «число». $P(A) = P(B) = 0,5$

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття випадкової події і випадкового експерименту. У повсякденному житті, у практичній та науковій діяльності ми часто спостерігаємо ті чи інші явища, проводимо певні експерименти (досліди).

Подія, яка може відбутися, а може і не відбутися в процесі спостереження або експерименту в одних і тих самих умовах, називається випадковою подією. Ви купуєте лотерейний квиток, і ви можете виграти, а можете й не виграти; на виборах може перемогти один кандидат, а може й інший; автобус може підійти вчасно чи спізнитися — усе це приклади випадкових подій. Ви кидаєте монету. Може випасти «герб», а може — «число». Якщо монета однорідна і має правильну геометричну форму, то можливості того, що ці події відбудуться, однакові. Такі події називаються *рівноможливими* чи *рівноімовірними*. Тобто рівноможливі події — це такі події, кожна з яких не має ніяких переваг у з'явленні частіше інших при багаторазових експериментах, що проводяться в приблизно однакових умовах.

Але зовсім не всі події рівноможливі. Може не задзвонити будильник, перегоріти лампочка, зламатися автобус, але в звичайних умовах такі події *малоймовірні*. Більш імовірно, що будильник задзвонить, лампочка загориться, автобус поїде.

Існують і такі події, що у звичайних умовах відбуваються завжди, обов'язково. Такі події називаються *вірогідними*. Наприклад, якщо атмосферний тиск становить $p = 101\ 325$ Па (нормальна атмосфера), то при $0\ ^\circ$C вода замерзає, а при $100\ ^\circ$C закипає; якщо перекинути чашку з чаєм, він обов'язково виллється.

Є і такі події, що в даних умовах ніколи не відбуваються. Такі події називаються *неможливими*. Неможливо в звичайних умовах не вилити воду, перекинувши склянку з водою догори дном; кішка не може схопити сонячного зайчика і т. д.

Вірогідні і неможливі події зустрічаються в житті порівняно рідко, можна сказати, що ми живемо у світі випадкових подій. Тому важливо зрозуміти: чи можна знайти якісь закономірності у світі випадкового? Чи можна якимись способами оцінити шанси появи випадкової події, яка нас цікавить?

Відповідь на ці питання дає розділ математики, що називається *теорія імовірностей*. Ми розглянемо тільки основи цієї теорії.

Одним із важливих понять, які розглядаються в теорії імовірностей, є поняття експерименту з випадковими результатами.

Перед початком футбольного матчу суддя підкидає монету, щоб визначити, яка з команд почне матч із центра поля. У команд рівні шанси почати гру. А чи має право суддя замість монети підкинути, наприклад, кнопку?

Підкидання кнопки, як і підкидання монети, — це експеримент із випадковими результатами, оскільки його результат залежить від випадку.

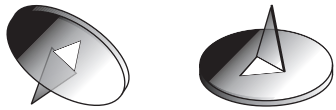

Вістря Кружок

Рис. 127

Кнопка може упасти як на вістря, так і на кружок (рис. 127). Але чи можна вважати ці події рівноможливими, чи одна з них більш імовірна, ніж інша?

Щоб відповісти на це питання, треба багато разів повторити експеримент із підкиданням кнопки.

Таке дослідження провела група з 20 школярів у одному з харківських ліцеїв у 2000 році. Кожний з них 100 разів підкинув кнопку, тобто усього було проведено 2000 експериментів. У результаті кнопка впала на вістря 909 разів, а на кружок — 1091 раз.

Ці експерименти показують, що кнопка частіше падає на кружок. Отже, суддя не має права перед матчем замінити монету кнопкою — у команд у такій ситуації були б нерівні шанси почати гру.

Експериментами з випадковими результатами* (чи коротше *випадковими експериментами*) *називають різні експерименти, досліди, випробовування, спостереження, виміри, результати яких залежать від випадку і які можна повторити багато разів в однакових умовах.

Наприклад, це серія пострілів одного і того самого стрільця по одній і тій самій мішені, участь у лотереї, витягання занумерованих куль із коробки, багаторічні спостереження за погодою в той самий день у тому самому місці, досліди з рулеткою, з підкиданням грального кубика, монети, кнопки.

Будь-який результат випадкового експерименту є випадковою подією. Внаслідок такого експерименту ця подія може або відбутися, або не відбутися. Надалі будемо позначати випадкові події великими латинськими літерами $A, B, C, D, \ldots$.

2. Частота і відносна частота випадкової події. Статистичне означення імовірності. Одним із важливих понять, які використовуються в теорії імовірностей, є поняття *частоти випадкової події*.

Якщо при незмінних умовах випадковий експеримент проведено n разів і в $n(A)$ випадків відбулася подія A, то число $n(A)$ називається частотою події A.

Наприклад, учні однієї з шкіл у 2000 році провели 8000 експериментів з підкиданням монети, щоразу записуючи результат — «герб» чи «число». У їхньому експерименті «герб» випав 3962 рази. Отже, у цьому експерименті частота події A (випав «герб») — дорівнює 3962.

У XVIII ст. такі експерименти з монетою проводив французький натураліст Жорж Луї де Бюффон, у якого «герб» випав 2048 разів при 4040 підкиданнях монети. На початку XX ст. англійський математик

Карл Пірсон провів уже 24 000 експериментів, при цьому «герб» випав 12 012 разів.

Для кожного з розглянутих експериментів підрахуємо, яку частину складає випадання «герба» від загального числа підкидань монети, чи, як говорять, підрахуємо *відносну частоту випадання «герба»*.

Відносною частотою **випадкової події називають відношення числа появи цієї події до загального числа проведених експериментів.**

Наприклад, для розглянутих експериментів частота випадання «герба»:

$$\text{у школярів} \quad \frac{3962}{8000} \approx 0{,}4953;$$

$$\text{у Бюффона} \quad \frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069;$$

$$\text{у Пірсона} \quad \frac{12\,012}{24\,000} \approx 0{,}5005.$$

Неважко помітити, що серії експериментів, проведених у різні епохи й у різних країнах, дають схожий результат: при багаторазовому підкиданні монети частота появи «герба» приблизно дорівнює 0,5. Отже, хоча кожен результат підкидання монети — випадкова подія, при багаторазовому повторенні експерименту помітна виразна закономірність.

Число 0,5 — це *імовірність випадкової події* (випадання «герба»). Але в цих експериментах «число» з'являється також приблизно в половині випадків, то й імовірність випадання «числа» дорівнює 0,5. Взагалі,

якщо при проведенні великої кількості випадкових експериментів, у кожному з яких може відбутися або не відбутися подія *A*, значення відносної частоти події *A* близькі до деякого певного числа, то це число називається *імовірністю випадкової події A*.

Наведене означення звичайно називають *статистичним означенням імовірності*.

Імовірність події позначається великою латинською буквою P (першою буквою французького слова *probabilité* чи латинського слова *probabilitas*, що в перекладі означає «імовірність»).

Якщо позначити подію «випаде «герб» буквою A, а подію «випаде «число» — буквою B, то твердження про те, що імовірність випадання «герба» чи «числа» дорівнює 0,5, можна записати так:

$$P(A) = 0{,}5, \qquad P(B) = 0{,}5.$$

Іноді імовірність виражають у відсотках, тоді

$$P(A) = 50\,\%, \qquad P(B) = 50\,\%.$$

Той факт, що імовірність появи «герба» дорівнює 0,5, звичайно, не означає, що в будь-якій серії експериментів «герб» з'явиться рівно в половині випадків. Але якщо число експериментів досить велике, ми можемо дати прогноз, що «герб» випаде приблизно в половині випадків. Тобто, *знаючи імовірність події, ми можемо прогнозувати частоту її появи в майбутньому при великій кількості відповідних експериментів.*

З а у в а ж е н н я. Якщо при проведенні великого числа випадкових експериментів значення відносної частоти випадкової події близькі до деякого певного числа, то кажуть, що відносна частота має *статистичну стійкість*, а такі випадкові експерименти називають *статистично стійкими*. Отже, у кожному випадку, коли ми можемо визначити статистичну імовірність результатів випадкових експериментів, ці випадкові експерименти будуть статистично стійкими. Зазначимо також, що *чим більше число проведених випадкових експериментів, тим ближче значення відносної частоти випадкової події до імовірності цієї події.*

Нагадаємо, що в кожному випадковому експерименті з підкиданням монети ми спочатку підраховували відносну частоту розглянутої події за допомогою формули:

$$\textbf{відносна частота} = \frac{\text{число появи події}}{\text{число експериментів}} = \frac{n(A)}{n}.$$

Потім, використовуючи знайдену частоту, оцінювали імовірність даної події.

Оцінку імовірності випадкової події за її частотою можна виконати, використовуючи результати інших експериментів — із кнопками, гральним кубиком, рулеткою, автомобільними чи телефонними номерами. При цьому чим більше проведено експериментів, тим точніше можна оцінити імовірність події за її відносною частотою.

Наприклад, у наведеній нижче таблиці представлено результати експериментів, проведених учнями одного з ліцеїв, які оцінювали імовірність випадкової події —кнопка впала вістрям униз.

Число експериментів	10	20	30	50	100	200	500	1000	2000
Число падінь кнопки вістрям униз (частота)	5	9	14	22	45	92	226	450	909
Відносна частота падіння кнопки вістрям униз	0,5	0,45	0,47	0,44	0,45	0,46	0,45	0,45	0,45

За даними таблиці можна зробити висновок, що імовірність падіння кнопки вістрям униз приблизно дорівнює 0,45, або 45 %.

Імовірнісні оцінки широко використовуються у фізиці, біології, соціології, в економіці і політиці, у спорті і повсякденному житті кожної людини.

Якщо в прогнозі погоди повідомляють, що завтра буде дощ з імовірністю 70 %, це означає, що не обов'язково піде дощ, але шанси на це великі і варто, виходячи з дому, захопити парасольку чи плащ.

З а у в а ж е н н я. Якщо в прогнозі погоди повідомляють, що завтра буде дощ з імовірністю 70 %, це означає, що в минулі роки в дні цієї пори року при аналогічних показниках стану атмосфери (температура і вологість повітря, швидкість і напрям вітру, хмарність і т. п.) дощ був приблизно в 70 % випадків.

3. Імовірності вірогідних, неможливих і довільних випадкових подій. Нагадаємо, що вірогідна подія — це подія U, яка обов'язково відбувається при кожному повторенні експерименту, а неможлива подія (її часто позначають $\varnothing$) не відбувається ні при якому повторенні експерименту.

Але якщо неможлива подія $\varnothing$, що нас цікавить, не відбудеться жодного разу при проведенні n експериментів, тоді її відносна частота буде дорівнювати $\frac{n(\varnothing)}{n}=\frac{0}{n}=0$.

А якщо вірогідна подія U відбувається в кожному з n експериментів, то відносна частота її появи дорівнює $\frac{n(U)}{n}=\frac{n}{n}=1$.

Тому природно вважати, що

імовірність вірогідної події дорівнює одиниці:

$$P(U)=1, \qquad (1)$$

а **імовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\varnothing)=0$.**

Наприклад, імовірність того, що при підкиданні звичайного грального кубика (на гранях якого позначено очки від 1 до 6 — рис. 128) випаде 8 очок (неможлива подія) дорівнює нулю. Таким чином,

імовірність випадкової події A може набувати будь-яких значень від 0 до 1.

Дійсно, при проведенні n експериментів $0 \leqslant n(A) \leqslant n$, отже, відносна частота появи події A набуває значень: $0 \leqslant \frac{n(A)}{n} \leqslant 1$. Тоді й імовірність $P(A)$ повинна задовольняти умові

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1. \qquad (2)$$

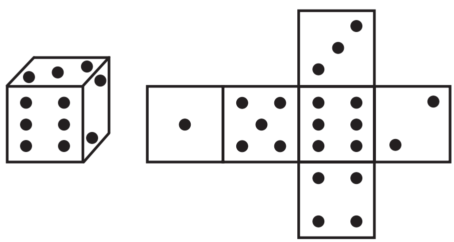


Рис. 128

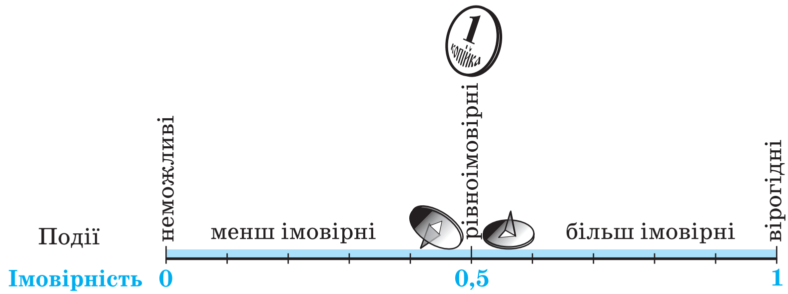


Рис. 129

Цьому факту можна дати геометричне тлумачення за допомогою так званої імовірнісної шкали (рис. 129).

Отже, імовірність випадкової події може бути будь-яким числом від 0 до 1. Чим більше імовірність, тим частіше настає випадкова подія при багаторазовому повторенні експерименту.

Значний інтерес викликають випадкові події, які мають імовірності, близькі до 1 чи до 0. Події, імовірності яких близькі до 1, часто називають *практично вірогідними* подіями, а події з малими імовірностями — *практично неможливими* подіями. Питання про те, які імовірності можна вважати такими малими, щоб ними можна було знехтувати, вирішується в залежності від конкретних обставин.

Наприклад, при масовому виробництві електричних лампочок чи цвяхів 0,5 % браку можна вважати допустимо малим (у цьому випадку імовірність того, що випущений виріб буде бракованим, дорівнює 0,005). Якщо ж яка-небудь бракована деталь у складному механізмі може призвести до аварії чи катастрофи з людськими жертвами, то в цьому випадку допустимо малими слід вважати ті значення, які не перевищують десятитисячних чи навіть мільйонних частин одиниці.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що таке випадковий експеримент та випадкова подія. Наведіть приклади.
2. Поясніть на прикладі, що називають частотою та відносною частотою події A.
3. Поясніть зміст статистичного означення імовірності. Наведіть приклади. Як позначається імовірність події A?
4. Яка подія вважається вірогідною, а яка неможливою? Наведіть приклади. Чому дорівнюють імовірності вірогідної та неможливої подій?

5^*. Обґрунтуйте, що імовірність випадкової події A може набувати будь-яких значень від 0 до 1.

6. Поясніть, які події вважаються рівноможливими. Наведіть приклади рівноможливих та нерівноможливих подій.

Вправи

1°. Укажіть, які з подій у наведених експериментах є вірогідними, неможливими чи просто випадковими.

№	Експеримент	Подія
1	Виконання пострілу	Попадання в ціль
2	Нагрівання води (при звичайних умовах)	Вода перетворилася на лід
3	Участь у лотерії	Ви виграєте, беручи участь у лотереї
4	Участь у безпрограшній лотерії	Ви не виграєте, беручи участь у безпрограшній лотереї
5	Підкидання звичайного грального кубика	Випадання 5 очок
6	Підкидання звичайного грального кубика	Випадання менше 8 очок
7	Перевірка роботи дзвінка	Ви натиснули на кнопку дзвінка, а він не задзвонив
8	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли чорну кулю
9	Витягання кулі з коробки з білими кулями	Витягли білу кулю
10	Витягання двох куль з коробки з 10 білими і 5 чорними кулями	Витягли білу і чорну кулі
11	Витягання карти з колоди	Витягли туз

2. Придумайте по три приклади вірогідних, неможливих і просто випадкових події. Приклади запишіть у вигляді таблиці, як це зроблено у вправі 1.

3. У наведеній нижче таблиці представлено результати експериментів по підкиданню ґудзика (рис. 130), проведених учнями однієї з шкіл, які оцінювали імовірність випадкової події — ґудзик впаде вушком для пришивання вниз.

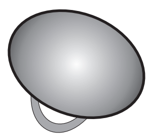


Рис. 130

Число експериментів	10	20	50	100	200	500	1000
Число падінь ґудзика вушком вниз	6	9	24	44	92	232	461

1) Оцініть відносну частоту падінь ґудзика вушком вниз у кожному експерименті (запишіть її наближено з точністю до сотих);
2) оцініть імовірність падінь ґудзика вушком вниз;
3) запишіть частоту і відносну частоту падінь ґудзика кружком вниз;
4) оцініть імовірність падінь ґудзика кружком вниз.

4. Щоб визначити, як часто зустрічаються в лісопарку дерева різних порід, учні провели такі експерименти. Кожний вибрав свою стежину і, йдучи нею, записував породу кожного десятого дерева. Результати було занесено в таблицю:

Порода дерева	сосна	дуб	береза	ялина	осика	Усього
Число дерев	315	217	123	67	35	757

Оцініть імовірність того, що обране навмання в цьому парку дерево буде:
1) сосною; 2) хвойним; 3) листяним.
(Відповідь запишіть наближено у вигляді десяткового дробу з двома знаками після коми.)

5. Щоб визначити, який колір волосся у жителів міста зустрічається частіше, а який рідше, учні за півгодини провели такий експеримент. Кожний вибрав свій маршрут і записував по шляху проходження колір волосся кожного п'ятого зустрічного. Результати було занесено в таблицю:

Колір волосся	брюнети	шатени	руді	блондини	Усього
Число людей	198	372	83	212	865

Оцініть імовірність того, що обраний навмання житель цього міста буде:
а) шатеном; б) рудим; в) не рудим.
(Відповідь запишіть наближено у вигляді десяткового дробу з двома знаками після коми.)

6°. Відомо, що на 100 батарейок зустрічаються 3 бракованих. Яка імовірність купити браковану батарейку?

7°. У магазині підрахували, що звичайно з тисячі телевізорів виявляється 2 бракованих. Яка імовірність того, що телевізор, вибраний навмання в цьому магазині, буде бракованим?

8°. За статистикою у місті N за рік із кожної 1000 автомобілістів 2 попадають в аварію. Яка імовірність того, що автомобіліст у цьому місті весь рік проїздить без аварій?

9°. Яка імовірність того, що сонце зійде на заході?

10°. Яка імовірність того, що після 31 грудня наступить 1 січня?

11°. У пакеті лежать 20 зелених і 10 жовтих груш. Яка імовірність вийняти з пакета грушу? Яка імовірність вийняти з пакета яблуко?

12*. Виберіть навмання одну сторінку з книги будь-якого письменника і підрахуйте, скільки разів на цій сторінці з'являються букви «о» і «б», а також скільки усього на ній букв. Оцініть імовірність появи букв «о» і «б» у цьому тексті.

Поясніть, чому на клавіатурах друкарських машинок і комп'ютерів буква «о» розташована ближче до центра, а буква «б» — ближче до краю (рис. 131). Як ви поясните розташування інших букв?

13. Виготовили «неправильний» кубик з листа цупкого паперу. Для цього вирізали фігуру, зображену на рисунку 132, написали на гранях цифри і склеїли кубик, попередньо прикріпивши з внутрішньої сторони грані з цифрою 1 шматок пластиліну, як показано на рисунку. Після проведення з ним 1000 експериментів по підкиданню кубика отримали такі результати.

Число очок	1	2	3	4	5	6
Число випадань відповідної кількості очок	71	145	169	91	21	503

Використовуючи ці дані, оцініть імовірності вказаних нижче подій (записавши відповідні імовірності у вигляді десяткового дробу з трьома знаками після коми) і дайте відповіді на запитання:

1) Чи справедливе таке парі: «Я виграю, якщо випаде парне число очок, ви — якщо непарне»?
2) Чи справедливе таке парі: «Я виграю, якщо випаде число очок від 4 до 6, ви — якщо від 1 до 3»?
3) Чи справедливе таке парі: «Я виграю, якщо випаде не 6 очок, ви — якщо 6 очок»?

Рис. 131

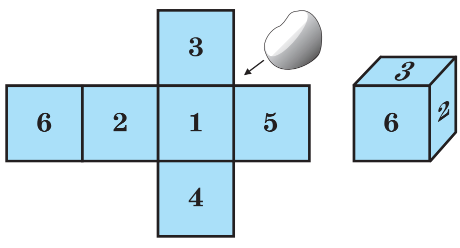
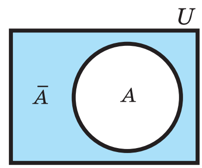
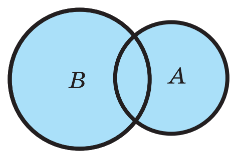
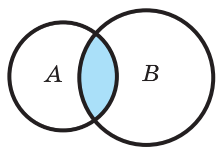


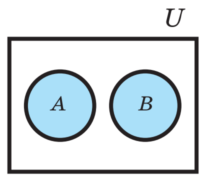
Рис. 132

19.2. Операції над подіями

Таблиця 27

<table>
<tr><th>Означення</th><th>Приклад</th><th>Ілюстрація</th></tr>
<tr><td colspan="3">1. Протилежна подія</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Подія $\bar{A}$ називається протилежною до події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A.
Імовірність протилежної події:
$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$</td><td>Подія A — випав «герб» при підкиданні монети, тоді подія $\bar{A}$ — не випав «герб» при підкиданні монети (тобто випало «число»).</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо імовірність купити справний прилад дорівнює 0,95, то імовірність купити несправний прилад дорівнює $1 - 0{,}95 = 0{,}05$.</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Сума подій</td></tr>
<tr><td>Сумою (або об'єднанням) подій A і B називається подія $A + B$ (інше позначення $A \cup B$), яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A або подія B.</td><td>З колоди карт навмання витягають 1 карту. Розглянемо події: A — витягли бубнову карту, B — витягли червову карту.
Тоді подія $A + B$ — витягли або бубнову, або червову карту (тобто карту червоної масті).</td><td>
$A + B$</td></tr>
<tr><td colspan="3">3. Добуток подій</td></tr>
<tr><td>Добутком (або перерізом) подій A і B називається подія $A \cdot B$ (інше позначення $A \cap B$), яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B.</td><td>При підкиданні грального кубика розглядають події: A — випало парне число очок, B — випало число очок, кратне 3.
Тоді подія $A \cdot B$ — випало число очок, яке одночасно є і парним, і кратним 3 (тобто випало 6 очок).</td><td>
$A \cdot B$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 27

<table>
<tr><td colspan="3">4. Несумісні події</td></tr>
<tr><td>Дві випадкові події A і B називаються несумісними, якщо їх добуток є неможливою подією, тобто $A \cdot B = \varnothing$ (за інших позначень $A \cap B = \varnothing$).</td><td>При підкиданні грального кубика розглядають події: A — випало парне число очок, B — випало 1 очко, C — випало число очок, кратне 3.
Події A і B та події B і C — несумісні (не можуть відбутися одночасно).
Події A і C — сумісні (можуть відбутися одночасно, якщо випаде 6 очок, тобто $A \cdot C \neq \varnothing$).</td><td>
$A \cdot B = \varnothing$</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Імовірність суми двох несумісних подій</td></tr>
<tr><td colspan="3">Якщо події A і B несумісні, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$,
тобто імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Іноді доводиться, знаючи імовірності одних випадкових подій, обчислювати імовірності інших подій, які одержуються з заданих за допомогою певних операцій. Розглянемо найпростіші операції над випадковими подіями, які далі будемо називати просто подіями.

1. Знаходження протилежної події. Нехай задана випадкова подія A.

Подія $\bar{A}$ називається *протилежною* до події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A.

Наприклад, якщо подія A полягає в тому, що випав «герб» при підкиданні монети, то подія $\bar{A}$ (читається: «Не A») означає, що «герб» не випав, а отже, випало число при підкиданні монети. Якщо подія B полягає в тому, що випало 1 очко при підкиданні грального кубика, то подія $\bar{B}$ означає, що 1 очко не випало, а отже, випало або 2, або 3, або 4, або 5, або 6 очок при підкиданні грального кубика.

Враховуючи, що в кожному експерименті відбувається одна і тільки одна з подій: або A, або $\bar{A}$, то $n(A)+n(\bar{A})=n$. Тоді $\frac{n(A)}{n}+\frac{n(\bar{A})}{n}=\frac{n}{n}=1$. Розглянуті експерименти є статистично стійкими, тому при великих значеннях n відносні частоти подій A та події $\bar{A}$ практично співпадають з імовірностями цих подій. Тоді $P(A)+P(\bar{A})=1$. Звідси

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

Наприклад, розглянемо подію A — кнопка впала вістрям вниз. Тоді протилежна подія $\bar{A}$ — кнопка впала вістрям догори (тобто кружком вниз). Як було показано на с. 260, імовірність події A дорівнює 0,45, тобто $P(A) = 0{,}45$, тоді імовірність події $\bar{A}$ дорівнює:

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}45=0{,}55.$$

2. Знаходження суми подій. Нехай задано дві випадкові події A і B.

Сумою **(або *об'єднанням*) подій A і B називається подія $A + B$ (інше позначення $A \cup B$), яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A або подія B.**

Наприклад, нехай при підкиданні грального кубика події A і B означають: A — випаде парна кількість очок, B — випаде число очок, яке ділиться на 3. Тоді подія $A + B$ означає, що випаде або парна кількість очок, або число очок, яке ділиться на 3, тобто випаде 2, 3, 4 чи 6 очок.

Аналогічно вводиться поняття суми декількох подій.

Сумою (або *об'єднанням*) *подій* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *називається подія* $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ (інше позначення $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$), *яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається хоча б одна із даних подій.*

3. Знаходження добутку подій. Нехай задано дві випадкові події A і B.

Добутком **(або *перерізом*) подій A і B називається подія $A \cdot B$ (інше позначення $A \cap B$), яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B.**

У наведеному вище прикладі подія $A \cdot B$ означає, що випаде і парна кількість очок, і число очок, яке ділиться на 3, тобто випаде 6 очок.

Аналогічно вводиться поняття добутку декількох подій.

Добутком (або *перерізом*) *подій* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *називається подія* $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n$ (інше позначення $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$), *яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються всі задані події*: і A_1, і A_2, ..., і A_n.

4. Несумісні події та їх імовірності.

Дві випадкові події A і B називаються *несумісними*, якщо їх добуток є неможливою подією, тобто $A \cdot B = \varnothing$ (за інших позначень, $A \cap B = \varnothing$).

Наприклад, нехай при киданні грального кубика можуть відбутися події: A — випаде парна кількість очок, B — випаде 5 очок. Ці події є несумісними, оскільки 5 — непарне число, і тому подія $A \cdot B$, яка полягає в тому, що випаде парна кількість очок і це буде 5 очок, є неможливою подією.

Якщо події A і B несумісні, то їх частоти $n\,(A)$ та $n\,(B)$ і частота $n\,(A+B)$ їх суми $A+B$ задовольняють умові

$$n\,(A+B) = n\,(A) + n\,(B),$$

оскільки подія $A+B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається або подія A, або подія B (а разом вони відбуватися не можуть). Але в цьому випадку відносні частоти будуть задовольняти такій умові:

$$\frac{n\,(A+B)}{n} = \frac{n\,(A)}{n} + \frac{n\,(B)}{n}.$$

Оскільки при великих значеннях n відносні частоти в цій рівності близькі до відповідних імовірностей, то **для несумісних подій A і B** повинна виконуватися рівність

$$\boldsymbol{P\,(A+B) = P\,(A) + P\,(B).} \qquad (3)$$

Тобто **імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій.**

Властивість (3) можна узагальнити.

Назвемо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *попарно несумісними*, якщо будь-які дві з цих подій A_i і A_j (при $i \neq j$) несумісні, тобто їх добуток є неможливою подією:

$$A_i \cdot A_j = \varnothing.$$

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, то з рівності (3) випливає що

$$P\,(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P\,(A_1) + P\,(A_2) + \ldots + P\,(A_n) \qquad (4)$$

тобто *імовірність суми несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій*. (Для обґрунтування цієї властивості досить використати метод математичної індукції.)

Зазначимо, що властивості (1)–(3) обов'язково повинні виконуватися при будь-якому способі означення імовірності випадкової події. Найбільш загальним з таких способів є аксіоматичне означення імовірності, яке розглянуте в наступному пункті.

З а у в а ж е н н я. Означення операцій над подіями аналогічні до відповідних означень операцій над множинами (через це і позначення операцій над подіями співпадають з позначеннями операцій над множинами). Тому операції над подіями (як і операції над множинами) зручно ілюструвати за допомогою кругів Ейлера–Венна (див. § 17 та рис. 133–135).

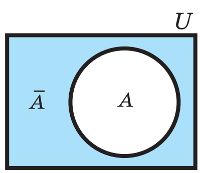


Рис. 133

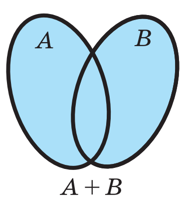


Рис. 134

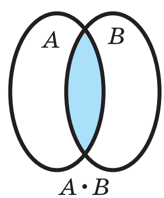


Рис. 135

Наприклад, враховуючи, що завжди виконується або подія A, або подія $\overline{A}$, одержуємо, що $A+\overline{A}=U$ (вірогідна подія). Враховуючи, що одночасно події A і $\overline{A}$ не можуть виконуватися, маємо $A\cdot\overline{A}=\varnothing$ (неможлива подія). Тоді подію $\overline{A}$ можна проілюструвати доповненням множини A (до множини U) (рис. 133).

Аналогічно суму двох подій A і B (нагадаємо, що подія $A + B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A або подія B, або обидві разом) можна проілюструвати у вигляді об'єднання множин A і B (рис. 134), а добуток подій A і B (подія $A \cdot B$ відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B) — у вигляді перерізу множин A і B (рис. 135).

Запитання для контролю

1. Поясніть, яка подія називається протилежною до події A. Наведіть приклади.
2. Як знайти імовірність протилежної події, знаючи імовірність події A? Чому дорівнює імовірність події $\overline{A}$, якщо $P(A) = 0{,}6$?
3. Яка подія називається сумою (або об'єднанням) подій A і B? Наведіть приклади.
4. Яка подія називається добутком (або перерізом) подій A і B? Наведіть приклади.
5. Які дві події називаються несумісними? Наведіть приклади. У якому випадку декілька подій називаються попарно несумісними?
6. а) Чому дорівнює імовірність суми двох несумісних подій?
   б*) Обґрунтуйте відповідну формулу.
7. Які події вважаються попарно несумісними? Як обчислюється імовірність суми попарно несумісних подій?

Вправи

1. Проводиться експеримент по підкиданню двох монет. Розглядаються такі події:
A — випав «герб» на першій монеті, B — випало «число» на першій монеті, C — випав «герб» на другій монеті, D — випало «число» на другій монеті.
Що означають події:
1) $A + C$; 2) $A \cdot C$; 3) $B + C$; 4) $B \cdot D$; 5) $\overline{A}$; 6) $\overline{B}\cdot D$?

2. Проводиться експеримент по підкиданню кубика. Розглядаються такі події:
A — випала парна кількість очок, B — випала непарна кількість очок, C — випало 3 очка, D — випало число очок менше 4.
Що означають події:
1) $\overline{A}$; 2) $A + C$; 3) $A \cdot D$; 4) $B \cdot C$; 5) $B \cdot D$; 6) $B\cdot\overline{D}$?

3*. Користуючись означеннями операцій над подіями, обґрунтуйте справедливість таких рівностей:

1) $A + U = U$; 2) $A + A = A$; 3) $A \cdot \bar{A} = U$;

4) $A \cdot \bar{A} = \varnothing$; 5) $A + \varnothing = A$; 6) $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

4. М'яч тричі кидають у баскетбольний кошик. Події A_1, A_2, A_3 означають: A_1 — при першому кидку м'яч влучив у кошик, A_2 — при другому кидку м'яч влучив у кошик, A_3 — при третьому кидку м'яч влучив у кошик. Запишіть через події A_1, A_2, A_3 такі події:

1) B — м'яч влучив у кошик всі три рази;

2) C — м'яч жодного разу не влучив у кошик;

3) D — м'яч хоча б один раз влучив у кошик;

4) K — м'яч потрапив у кошик тільки при першому кидку.

5) M — м'яч потрапив у кошик тільки при другому та третьому кидку.

5. Для експерименту по підкиданню кубика вкажіть, які з наведених подій є попарно несумісними: A — випала парна кількість очок, B — випала непарна кількість очок, C — випало 3 очка, D — випало менше 3 очок, K — випала кількість очок, кратна 3, M — випало 6 очок, T — випало більше 4 очок, F — випало число очок менше 7.

6. Для експерименту по витяганню карт з колоди вкажіть, які з наведених подій є попарно несумісними: A — витягли карту чирвової масті, B — витягли карту бубнової масті, C — витягли короля, D — витягли даму, K — витягли карту, старшу за валета, M — витягли карту з числовими позначеннями.

7. У результаті значної кількості спостережень учні визначили імовірність, з якою в лісопарку зустрічаються дерева різних порід, і записали результати в таблицю:

Порода дерева	сосна	дуб	береза	ялина	осика
Імовірність	0,42	0,29	0,16	0,09	0,04

Знайдіть імовірність того, що обране навмання в цьому лісопарку дерево буде:

2) сосною або дубом; 2) не дубом; 3) хвойним; 4) листяним; 5) не осикою; 6) хвойним або листяним (поясніть, що означає останній результат).

8. У результаті значної кількості спостережень учні визначили імовірності того, який колір волосся зустрічається у жителів міста частіше, а який рідше, і склали таблицю:

Колір волосся	брюнети	шатени	руді	блондини
Імовірність	0,23	0,43	0,1	0,24

Знайдіть імовірність того, що обраний навмання житель цього міста буде: 1) шатеном або рудим; 2) не рудим; 3) брюнетом або блондином; 4) не блондином.

9. У результаті тривалих спостережень за якістю продукції одного цеху з'ясувалося, що цех у середньому випускає 31% продукції вищого ґатунку і 60 % продукції першого ґатунку. Знайдіть імовірність того, що навмання взятий виріб буде:
1) першого або вищого ґатунку;
2) гіршим, ніж вироби першого ґатунку.

10. Стрілець стріляє по мішені і влучає в десятку з імовірністю 0,05, у дев'ятку — з імовірністю 0,2 і у вісімку — з імовірністю 0,5 (максимальне число очок на мішені — 10). Виконано один постріл. Знайдіть імовірність таких подій:
1) A — вибито більше восьми очок, B — вибито не менше восьми очок.

11. Петро пропонує чесне парі на умовах 4 : 1 (чотири «за» до одного «проти»), що настане подія A. Якими він вважає імовірності подій A і $\overline{A}$?

19.3. Аксіоматична побудова теорії імовірностей. Класичне означення імовірності

Таблиця 28

1. Простір елементарних подій	
Поняття	Приклад
Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій $u_1, u_2, \dots, u_n$. Назвемо ці події *елементарними подіями*, а множину всіх цих подій $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ — ***простором елементарних подій.*** Сумою всіх елементарних подій є вірогідна подія U: $u_1 + u_2 + \dots + u_n = U$ (оскільки в результаті заданого експерименту обов'язково відбудеться одна з подій $u_1, u_2, \dots, u_n$)	1. Для експерименту по підкиданню монети елементарними подіями будуть події: u_1 — випадання «герба», u_2 — випадання «числа». Тоді простір елементарних подій буде складатися з двох подій: $U = \{u_1, u_2\}$. (Ці події попарно несумісні, у результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.) 2. Для експерименту по підкиданню грального кубика елементарними подіями можуть бути події $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$, де u_k — випадання k очок, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. У цьому випадку простір елементарних подій буде складатися з шести подій. $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$.

Продовж. табл. 28

2*. Аксіоми імовірності	
Аксіома 1. ***Для довільної події A*** $P(A) \geqslant 0.$ Аксіома 2. ***Для вірогідної події U*** $P(U) = 1.$ Аксіома 3. ***Для довільних попарно несумісних подій*** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$	
3. Класичне означення імовірності (для рівноможливих елементарних подій)	
Імовірність події A — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій (m) до числа всіх рівноможливих елементарних подій в даному експерименті (n): $P(A) = \frac{m}{n}$	**Приклад.** Знайдіть імовірність випадання більше чотирьох очок при підкиданні грального кубика. ▶ Розглянемо як елементарні події шість рівноможливих результатів підкидання кубика — випадання 1, 2, 3, 4, 5 або 6 очок (отже, у цій задачі $n = 6$). Подія A — випадання більше 4 очок. Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події — випадання 5 або 6 очок (тобто $m = 2$). Тоді $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ◁

Пояснення й обґрунтування

1. Аксіоматична побудова теорії імовірностей аналогічна до аксіоматичної побудови геометрії, у якій замість реальних об'єктів чи їх зображень на папері (точок, прямих, площин тощо) розглядаються абстрактні поняття (точок, прямих, площин тощо), що задовольняють певним аксіомам (планіметрії і стереометрії). При аксіоматичній побудові теорії імовірностей поняття «випадкова подія», «імовірність» тощо — це математичні ідеальні поняття, які задовольняють умовам (1)–(3) (див. с. 265, 273). Пояснимо сутність аксіоматичної побудови теорії імовірностей на такому прикладі.

Нехай у деякій коробці U є n однакових куль, які деяким чином відмічені так, щоб їх можна було відрізнити одну від одної (наприклад, пронумеровані, як у телевізійних розіграшах лотерей). Позначимо кулі $u_1, u_2, \ldots, u_n$, а множину всіх куль, які містяться в коробці $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ (на рисун-

* Цей матеріал є обов'язковим тільки для класів фізико-математичного профілю.

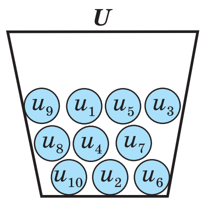


Рис. 136

ку 136 зображена коробка, що містить 10 куль). Кулі в коробці ретельно змішують, а потім якимось випадковим чином з коробки виймають одну кулю. Припустимо, що витягли кулю u_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Нехай $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ — деяка множина куль із U. *Якщо витягнута куля u_i належить множині A, то будемо говорити, що відбулася подія A.*

Тоді вірогідною подією будемо вважати всю множину U, тобто всю множину куль у коробці (оскільки будь-яка витягнута куля буде належати множини U). Неможливою подією будемо вважати порожню множину $\varnothing$.

Дві події $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ і $B = \{u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_k}\}$ несумісні, якщо множини A і B не мають спільних елементів. Сумі подій $A + B$ відповідає об'єднання множин $A \cup B$, а добутку подій $A \cdot B$ — переріз $A \cap B$ множин A і B. Події B, протилежній до події A, відповідає доповнення B множини A до множини U.

Кожній події A якимось чином (наприклад, через статистичне означення) ставиться у відповідність її імовірність — число $P(A)$, що задовольняє умовам (1), (2), (3).

Таким чином, можна сформулювати абстрактні імовірнісні поняття, використовуючи тільки терміни теорії множин.

Розглянемо скінченну множину $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, елементи якої u_i (де $i = 1, 2, \ldots, n$) назвемо *елементарними подіями* (множину U називають *простором елементарних подій*). Будь-яку підмножину $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ множини U назвемо *подією*. Вся множина U — це *вірогідна подія*, а порожня множина $\varnothing$ — це *неможлива подія*.

***Сума* $A + B$ подій A і B означається як об'єднання $A \cup B$ множин A і B, а *добуток* $A \cdot B$ подій A і B — як переріз $A \cap B$ множин A і B.**

Якщо добуток подій A і B є порожньою множиною ($A \cdot B = \varnothing$), то події A і B називають *несумісними*.

Подія $\bar{A}$, *протилежна* до події A, означається як доповнення $\bar{A}$ множини A до множини U (тобто як множина всіх елементів u_i, які не входять до A). Події A і $\bar{A}$ задовольняють умовам $A \cdot \bar{A} = \varnothing$ і $A + \bar{A} = U$.

Тепер означимо імовірність $P(A)$ події A.

Нехай яким-небудь чином задано числа $p(u_i)$ (де $i = 1, 2, \ldots, n$), що задовольняють умовам:

$$p(u_i) \geqslant 0,$$
$$p(u_1) + p(u_2) + \ldots + p(u_n) = 1.$$

Ці числа називають *елементарними імовірностями*.

Імовірність $P(A)$ події $A = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ означимо рівністю

$$P(A) = p(u_{i_1}) + p(u_{i_2}) + \ldots + p(u_{i_m}).$$

Означене таким чином поняття імовірності задовольняє таким аксіомам.

А к с і о м а 1 (невід'ємності імовірності). ***Для довільної події A***

$$P(A) \geqslant 0.$$

А к с і о м а 2 (нормованості імовірності). ***Для вірогідної події U***

$$P(U) = 1.$$

А к с і о м а 3 (адитивності імовірності). ***Для довільних попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$*** (тобто для таких, що $A_i \cdot A_j = \varnothing$ для будь-яких не рівних між собою i і j)

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Фактично, це ті самі властивості (1)– (3), яким, як було вказано вище, повинні задовольняти всі означення імовірностей випадкових подій. З цих аксіом випливає, що імовірність неможливої події $P(\varnothing) = 0$, а імовірність події B, протилежної до події A, обчислюється за формулою $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Дійсно, оскільки $U \cdot \varnothing = \varnothing$, то події U і $\varnothing$ несумісні, і тоді з рівності $U = U + \varnothing$ за аксіомою 3 одержуємо $P(U) = P(U) + P(\varnothing)$. Враховуючи, що за аксіомою 2 імовірність $P(U) = 1$, одержуємо $1 = 1 + P(\varnothing)$. Звідси

$$P(\varnothing) = 0.$$

Аналогічно, якщо $B = \overline{A}$, то $A \cdot B = \varnothing$. Отже, події A і B несумісні, і тоді з рівності $A + B = U$ за аксіомами 3 і 2, одержуємо $P(A) + P(B) = P(U)$. Тобто $P(A) + P(B) = 1$, отже, $P(B) = 1 - P(A)$.

У відповідності до системи аксіом 1–3 в залежності від задачі, яка розв'язується, елементарні імовірності $p(u_i)$, а відповідно й імовірності $P(A)$, можуть задаватися різними способами.

2. Класичне означення імовірності. У випадку, коли елементарні події не є рівноімовірними (наприклад, падіння кнопки на вістря чи на кружок при підкиданні кнопки — див. с. 261), доводиться використовувати статистичне означення імовірності. Але для того щоб знайти імовірність події, що нас цікавить, при статистичному означенні потрібно провести досить значну кількість експериментів чи спостережень. Разом з тим, коли розглядаються експерименти з випадковими результатами (тобто випадковими подіями) і всі ці результати *рівноможливі, тобто є всі підстави вважати, що шанси отримання цих результатів однакові*, то імовірність випадкової події вдається знайти шляхом міркувань, не виконуючи експериментів. Наведемо відповідні міркування і означення.

Нехай результатом деякого випадкового експерименту може бути тільки одна з попарно несумісних подій $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Назвемо ці події *елементарними подіями*. Тоді сумою цих подій є вірогідна подія U

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = U.$$

Це випливає з означення суми подій (с. 268), згідно з яким якщо в результаті заданого експерименту обов'язково відбувається одна з подій

$u_1, u_2, \ldots, u_n$, то обов'язково відбудеться і їх сума. Враховуючи, що імовірність вірогідної події дорівнює одиниці ($P(U)=1$) і те, що імовірність суми несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій, маємо

$$p(u_1)+p(u_2)+\ldots+p(u_n)=1.$$

Якщо всі події $u_1, u_2, \ldots, u_n$ рівноімовірні: $p(u_1)=p(u_2)=\ldots=p(u_n)$, то одержуємо

$$p(u_1)=p(u_2)=\ldots=p(u_n)=\frac{1}{n}.$$

Наприклад, якщо кидати гральний кубик (див. рис. 130) і вважати, що кубик має правильну форму і виготовлений з однорідного матеріалу, то шанси випадання на його верхній грані будь-якого числа очок від 1 до 6 однакові. У цьому випадку говорять, що існує шість попарно несумісних рівноможливих (чи рівноімовірних) елементарних результатів (подій) цього експерименту (подія u_k — це «випадання k очок, де $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$») і імовірність кожної з таких подій дорівнює $\frac{1}{6}$.

Нехай подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли відбудеться одна з m попарно несумісних елементарних подій $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ (у цьому випадку говорять, що елементарні події $u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}$ *сприятливі* для події A). Це можна записати так: $A=\{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_m}\}$ або, використовуючи поняття суми подій, так: $A=u_{i_1}+u_{i_2}+\ldots+u_{i_m}$. Враховуючи, що імовірність суми попарно несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій, і те, що імовірність кожної з m вибраних елементарних подій дорівнює $\frac{1}{n}$ (тобто $p(u_{i_1})=p(u_{i_2})=\ldots=p(u_{i_m})=\frac{1}{n}$), маємо:

$$P(A)=p(u_{i_1})+p(u_{i_2})+\ldots+p(u_{i_m})=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{m\text{ разів}}=\frac{m}{n}.$$

Одержану рівність

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

часто приймають за означення імовірності у випадку рівноможливих елементарних подій і називають *класичним означенням імовірності*. Його можна сформулювати так:

імовірність події A — це відношення числа сприятливих для неї елементарних подій до числа всіх рівноможливих елементарних подій у даному експерименті.

Приклад 1 Користуючись цим означенням, знайдемо імовірність події A — випадання числа очок, кратного 3, при підкиданні грального кубика.

▶ Як відмічалося вище, в експерименті по киданню кубика існує шість попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок (також можна сказати, що простір елементарних подій складається з шести вказаних попарно несумісних рівноможливих подій). Сприятливими для події A є тільки дві елементарні події: випадання 3 очок і випадання 6 очок. Отже, імовірність події A дорівнює: $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. ◁

Приклад 2 Петро і Павло кидають білий і чорний гральні кубики і кожного разу підраховують суму очок, що випали. Вони домовилися, що у випадку, коли в черговій спробі в сумі випаде 8 очок, то виграє Петро, а коли в сумі випаде 7 очок, то виграє Павло. Чи є ця гра справедливою?

▶ При киданні кубиків на кожному з них може випасти 1, 2, 3, 4, 5 чи 6 очок. Кожному числу очок, які випали на білому кубику (1, 2, 3, 4, 5 чи 6 очок), відповідає шість варіантів числа очок, які випали на чорному кубику. Отже, всього одержуємо 36 попарно несумісних рівноможливих елементарних подій — результатів цього експерименту, які наведено в таблиці:

(1; 1)	(2; 1)	(3; 1)	(4; 1)	(5; 1)	(6; 1)
(1; 2)	(2; 2)	(3; 2)	(4; 2)	(5; 2)	(6; 2)
(1; 3)	(2; 3)	(3; 3)	(4; 3)	(5; 3)	(6; 3)
(1; 4)	(2; 4)	(3; 4)	(4; 4)	(5; 4)	(6; 4)
(1; 5)	(2; 5)	(3; 5)	(4; 5)	(5; 5)	(6; 5)
(1; 6)	(2; 6)	(3; 6)	(4; 6)	(5; 6)	(6; 6)

(У кожній парі чисел на першому місці записано число очок, яке випало на білому кубику, а на другому місці — число очок, що випало на чорному кубику.)

Нехай подія A означає, що при киданні кубиків у сумі випало 8 очок, а подія B — що при киданні кубиків у сумі випало 7 очок.

Для події A сприятливими є такі 5 результатів (елементарних подій):

(2; 6), (3; 5), (4; 4), (5; 3), (6; 2).

Для події B сприятливими є такі 6 результатів (елементарних подій):

(1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1).

Тоді

$$P(A)=\frac{5}{36},\ P(B)=\frac{6}{36}.$$

Отже, шансів виграти у Павла більше, ніж у Петра. Тобто така гра не буде справедливою. ◁

Зазначимо, що результати експерименту по підкиданню двох гральних кубиків, наведені у прикладі 2, дозволяють обчислити імовірності появи тієї чи іншої суми очок, що випадають при підкиданні двох гральних кубиків.

Сума очок	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Імовірність	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Приклад 3 З 15 виготовлених велосипедів 3 виявилися з дефектами. Яка імовірність того, що 2 вибрані навмання велосипеди будуть без дефектів?

▶ Нехай подія A полягає в тому, що 2 вибрані навмання велосипеди будуть без дефектів. З 15 велосипедів вибрати 2 можна C_{15}^2 способами (число сполук з 15 по 2). Усі ці вибори є рівноможливими і попарно несумісними. Отже, загальна кількість рівноможливих результатів (тобто загальна кількість елементарних подій) дорівнює C_{15}^2. Сприятливою подією для події A є вибір 2 бездефектних велосипедів із 12 бездефектних ($15 - 3 = 12$). Отже, число сприятливих результатів (подій) для події A дорівнює C_{12}^2. Звідси одержуємо

$$P(A) = \frac{C_{12}^2}{C_{15}^2} = \frac{\frac{12!}{2!(12-2)!}}{\frac{15!}{2!(15-2)!}} = \frac{12 \cdot 11}{15 \cdot 14} = \frac{22}{35}. \triangleleft$$

Приклад 4 Група туристів, у якій 6 юнаків і 4 дівчини, вибирає за жеребом чотирьох чергових. Яка імовірність того, що буде вибрано 2 юнаки і 2 дівчини?

▶ Число результатів (елементарних подій) при виборі чотирьох чергових з 10 туристів дорівнює C_{10}^4. Всі ці події рівноможливі і попарно несумісні.

Нехай подія A полягає в тому, що серед 4 чергових є 2 юнаки і 2 дівчини. Вибрати двох юнаків з 6 можна C_6^2 способами, а вибрати двох дівчат з 4 можна C_4^2 способами. За правилом добутку вибір і двох юнаків, і двох дівчат можна виконати $C_6^2 \cdot C_4^2$ способами — це і є кількість сприятливих подій для події A. Тоді

$$P(A) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{\frac{6!}{2!(6-2)!} \cdot \frac{4!}{2!(4-2)!}}{\frac{10!}{4!(10-4)!}} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}} = \frac{3}{7}. \triangleleft$$

Зауважимо, що в залежності від задачі, яка розглядається, для одного і того самого експерименту простір елементарних подій можна вводити по-різному. Найчастіше для цього незалежні елементарні події підбираємо так, щоб подія, імовірність якої потрібно знайти, сама була елементарною або виражалася через суму елементарних подій. Але для того щоб використати класичне означення імовірності, потрібно бути впевненим, що всі виділені елементарні події — рівноможливі.

Наприклад, як уже відмічалося у задачі про підкидання грального кубика, простір елементарних подій може складатися з 6 незалежних рівноможливих подій — випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок. Але якщо в задачі просять знайти імовірність випадання парного числа очок, то простором елементарних подій для цього експерименту може бути множина тільки двох подій: u_1 — випадання парної кількості очок і u_2 — випадання непарної кількості очок (оскільки ці події попарно несумісні і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій). Ці події рівноможливі (оскільки серед чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 рівно половина парних і половина непарних). Отже, за класичним означенням імовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{2}$. Звичайно, якби ми розглянули перший з указаних просторів елементарних подій, то теж змогли би розв'язати цю задачу: всього подій — 6, а сприятливих — 3 (випадання парного числа очок: 2, 4, 6). Тоді імовірність випадання парного числа очок дорівнює $\frac{3}{6}$, тобто $\frac{1}{2}$.

Спробуємо ввести для розв'язування цієї задачі такий простір елементарних подій: u_1 — випадання парної кількості очок, u_2 — випадання 1 очка, u_3 — випадання 3 очок, u_4 — випадання 5 очок. Ці події дійсно утворюють простір елементарних подій експерименту по підкиданню грального кубика, оскільки вони попарно несумісні і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій. Але, користуючись таким простором елементарних подій, ми не зможемо застосувати класичне означення імовірності, бо, як ми вже бачили, вказані елементарні події не є рівноможливими: $P(u_1)=\frac{1}{2}$, $P(u_2)=\frac{1}{6}$, $P(u_3)=\frac{1}{6}$, $P(u_4)=\frac{1}{6}$.

Запитання для контролю

1*. Поясніть, як можна ввести поняття простору елементарних подій та інші імовірнісні поняття, використовуючи терміни теорії множин. Як у цьому випадку вводиться поняття імовірності?
2*. Сформулюйте аксіоми імовірності.
3. На прикладах випадкових експериментів з підкиданням монети чи грального кубика поясніть, що таке елементарна подія та простір елементарних подій.
4. Сформулюйте класичне означенні імовірності. Наведіть приклади обчислення імовірностей за цим означенням.
5*. Спираючись на аксіоматичне означення імовірності, обґрунтуйте формулу для класичного означення імовірності.

Вправи

1°. На екзамені — 24 білети. Андрій не розібрався в одному білеті і дуже боїться його витягнути. Яка імовірність, що Андрію дістанеться «нещасливий» білет?

2°. На питання вікторини було отримано 1250 листівок із правильними відповідями, у тому числі і ваша. Для визначення призера ведучий повинен навмання витягти одну листівку. Яка імовірність того, що приз дістанеться вам?

3. У лотереї 10 виграшних квитків і 240 квитків без виграшу. Яка імовірність виграти в цю лотерею, купивши один квиток?

4. *Задача Даламбера*. Яка імовірність того, що при двох підкиданнях монети хоча б один раз випаде «герб»?

5. За перемогу в телегрі Яна одержить головний приз — подорож, якщо за одну спробу угадає, у якому з 12 секторів табло (рис. 137) захований приз.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

Рис. 137

1) Яка імовірність того, що Яна відправиться в подорож?
2) Відомо, що призи розміщені в чотирьох секторах табло. Яка імовірність того, що Яна виграє який-небудь приз?

6. У лотереї 100 квитків, із них 5 виграшних. Яка імовірність програшу?

7. У кишені лежать 6 монет (рис. 138). Яка імовірність вийняти навмання монету: 1) з парним числом копійок; 2) з непарним числом копійок; 3) менше 20 копійок?

8. Данило на картці спортлото (6 з 49) відзначив номери: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наташа на своїй картці відзначила номери: 5, 12, 17, 23, 35, 49. Як ви думаєте, виграш якого набору чисел більш ймовірний? Поясніть свою думку.

9. У Юрія в коробці 25 білих і 50 червоних куль, у Наталки в коробці 40 білих і 80 червоних куль. Вони грають у гру, переможцем якої стає той, хто першим, не дивлячись, вийме білу кулю із своєї коробки. Якщо вони виймають білу кулю одночасно — нічия. Юра вважає, що ця гра несправедлива, тому що в нього в коробці менше білих куль. Чи згодні ви з Юрою? Поясніть свою відповідь.

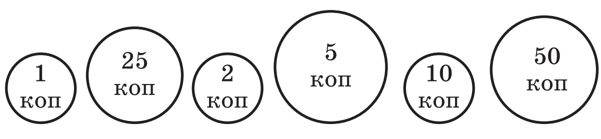


Рис. 138

10. Ілля відзначив у картці спортлото (6 з 49) номери: 7, 11, 15, 29, 38, 40 — і виграв. Тоді він вирішив, що ця комбінація чисел щаслива і він буде відмічати її у всіх тиражах. Чи дійсно він збільшить свої шанси на виграш? Поясніть свою відповідь.

11. У сумці лежать 12 червоних, 10 зелених і 3 жовтих яблука. 1) Яке яблуко імовірніше всього вийняти навмання із сумки? 2) Яка імовірність вийняти навмання: а) яблуко; б) грушу; в) зелене яблуко; г) не червоне яблуко?

12. Ви виграєте, якщо куля, вийнята навмання з коробки, біла. Яку з коробок вигідніше вибрати для гри, щоб імовірність виграшу була більшою: 1) у коробці 15 білих куль із 45; 2) у коробці 40 білих куль із 120; 3) у коробці 22 білі кулі і 44 червоні; 4) у коробці порівну білих, червоних і чорних куль.

13. Грані звичайного грального кубика пофарбовано в червоний і жовтий кольори. Імовірність випадання червоної грані дорівнює 1/6, імовірність випадання жовтої грані дорівнює 5/6. Скільки червоних і жовтих граней у кубика?

14. У коробці половина цукерок у червоних обгортках, третина — у синіх обгортках, інші — у зелених обгортках. Навмання вийняли одну цукерку. Якого кольору обгортка найменш імовірна в цієї цукерки? Знайдіть цю імовірність.

15. У шухляді лежать 8 червоних, 2 синіх і 20 зелених олівців. Ви навмання виймаєте олівець. Яка імовірність того, що це:
1) червоний олівець? 2) жовтий олівець? 3) не зелений олівець? 4) Яку найменшу кількість олівців потрібно вийняти, щоб з імовірністю, рівною 1, серед них був зелений олівець?

16. При грі в хокей хлопці поділяються на дві команди у такий спосіб. Кожний кладе свою ключку в загальну купу, а потім один із гравців (із зав'язаними очима) поділяє цю купу на дві рівні частини. Так утворюються дві команди. Нехай у грі збираються брати участь два сильні гравці. Яка імовірність того, що вони потраплять у різні команди? (Вказівка. Розглянути всі можливі варіанти перебування сильних гравців у двох командах.)

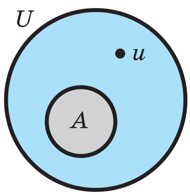
17. Кидають одночасно два гральні кубики. Яка імовірність того, що сума очок буде дорівнювати 12?

18. На ослін довільним чином сідають двоє чоловіків і жінка. Яка імовірність того, що чоловіки опиняться поруч?

19. З 5 карток з буквами M, P, O, A, E навмання вибирають 4 картки. Знайдіть імовірність того, що, поклавши їх у ряд у тому порядку, у якому ми їх вибирали, ми одержимо слово «море».

19.4. Геометричне означення імовірності

Таблиця 29

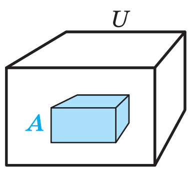
<table>
<tr><td colspan="2">1. Основні поняття</td></tr>
<tr><td>
</td><td>

U — деяка фігура на площині,
$S\ (U)$ — площа фігури U.

Експеримент — це випадковий вибір якоїсь точки u з фігури U (можна також вважати, що цю точку u випадково кинули на фігуру U).

Елементарні події u — точки фігури U.

A — частина фігури U ($A \subseteq U$),
$S\ (A)$ — площа фігури A.

Подія A — попадання точок u в фігуру A. Тоді *сприятливими елементарними подіями для події A будуть усі точки фігури A*. (Припускаємо, що імовірність попадання точки в частину фігури U пропорційна площі цієї частини і не залежить від її конфігурації і розміщення відносно фігури U.)
</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Означення геометричної імовірності</td></tr>
<tr><td>$P\ (A) = \dfrac{S\ (A)}{S\ (U)}$</td><td>**Геометричною імовірністю події A називається відношення площі фігури, сприятливої для події A, до площі всієї заданої фігури.**</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Загальне означення</td></tr>
<tr><td>


</td><td>

Якщо U — просторова фігура (тіло), то під записами $S\ (U)$ і $S\ (A)$ слід розуміти об'єми тіла U і його частини тіла A.

Якщо U — відрізок, то під записами $S\ (U)$ і $S\ (A)$ слід розуміти довжини відрізка U і його частини відрізка A.

(Об'єм тіла U у просторі, площу плоскої фігури U на площині, довжину відрізка U на прямій назвемо *мірою* фігури U.)
</td></tr>
<tr><td>$P(A) = \dfrac{\text{міра } A}{\text{міра } U}$</td><td>**Геометричною імовірністю події A називається відношення міри фігури, сприятливої для події A, до міри всієї заданої фігури.**</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

Наведене класичне означення імовірності не можна застосувати до випадкових експериментів з нескінченною кількістю результатів (тобто у випадку, коли множина U нескінченна). У цьому випадку імовірність події

$P(A)$ не завжди можна задати за допомогою елементарних імовірностей.

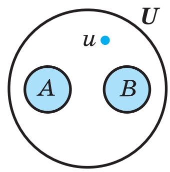


Рис. 139

Розглянемо випадок задання імовірностей $P(A)$ за допомогою так званих *геометричних імовірностей*. Нехай U — деяка фігура на площині, $S(U)$ — її площа, A — частина фігури U з площею $S(A)$ (рис. 139). Елементарними подіями u будемо вважати точки фігури U, тобто будемо вважати, що ми випадково вибираємо якусь точку u з фігури U (або кидаємо якусь точку на фігуру U). Будемо вважати подією A попадання точок u у фігуру A. Також будемо вважати, що такий випадковий вибір *рівномірний* (чи, як кажуть, розподіл імовірностей рівномірний), тобто імовірності попадання точки u у фігури A і B, які мають однакові площі, однакові і не залежать від положення цих фігур (якщо $A \subseteq U$; $B \subseteq U$ і $S(A) = S(B)$, то $P(A) = P(B)$). Тобто ми припускаємо, що імовірність попадання точки в частину фігури U пропорційна тільки площі цієї частини і не залежить від її розміщення відносно фігури U. Тоді імовірність попадання точки u у фігуру A означається як відношення площ

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}. \tag{8}$$

Оскільки сприятливими елементарними подіями для розглянутого експерименту є попадання вибраної точки у фігуру A, то фігуру A можна назвати сприятливою для цього експерименту, і тоді означення геометричної імовірності можна сформулювати так:

геометричною імовірністю події A називається відношення площі фігури, сприятливої для події A, до площі всієї заданої фігури.

Приклад 1 Нехай кругла мішень радіуса 20 см поділена концентричними колами з радіусами $R_k = 2(10 - k)$, де $k = 1, 2, \ldots, 9$ на 10 кілець. Внутрішній круг радіуса $R_9 = 2$ теж назвемо кільцем і будемо вважати, що $R_{10} = 0$, а $R_0 = 20$ (рис. 140). Поганий стрілець попав у мішень. Будемо вважати, що стрілець вибив k очок, якщо він попав у k-те кільце, тобто у кільце між колами радіусів R_{k-1} і R_k (або попав у коло радіуса R_{k-1}).

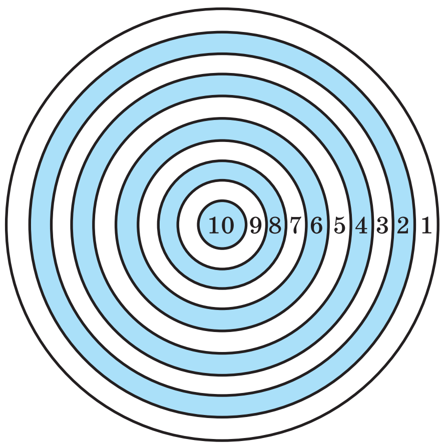


Рис. 140

Позначимо подію A_k — «стрілець вибив k очок» і визначимо імовірність кожної з таких подій при $k = 1, 2, \ldots, 9, 10$.

▶ Якщо вважати, що у поганого стрільця точки попадання куль рівномірно розподілені на крузі мішені, то можна використати геометричне означення імовірності. Одержуємо $P(A_k) = \frac{S_{k\text{-го кільця}}}{S_{\text{мішені}}}$. Враховуючи, що

$$S_{k\text{-го кільця}} = \pi R_{k-1}^2 - \pi R_k^2 = 4\pi(11-k)^2 - 4\pi(10-k)^2 = 4\pi(21-2k) \text{ і}$$

$$S_{\text{мішені}} = \pi R_0^2 = 400\pi, \text{ маємо}$$

$$P(A_k) = \frac{21-2k}{100}, \text{ де } k = 1, 2, \ldots, 9, 10. \triangleleft$$

З а у в а ж е н н я 1. Назвемо події A і B несумісними (подія A — точка попала у фігуру A, подія B — точка попала у фігуру B), якщо фігури A і B не мають спільних точок (тобто множини точок фігур A і B не мають спільних елементів). *Суму* подій $A + B$ і *добуток* $A \cdot B$ означимо як об'єднання $A \cup B$ і переріз $A \cap B$ множин точок фігур A і B.

Подію $\bar{A}$, *протилежну* до події A, означимо як доповнення $\bar{A}$ множини точок фігури A до множини U (тобто як множину всіх точок фігури U, які не входять до фігури A).

Тоді наведене означення геометричної імовірності задовольняє властивостям (1)–(3), а отже, і аксіомам 1–3, наведеним на с. 275.

● Дійсно, $P(U) = \frac{S(U)}{S(U)} = 1$, отже, властивість (1) і аксіома 2 виконуються.

За властивістю площі $S(A) > 0$, $S(U) > 0$, отже, $P(A) \geqslant 0$ (тобто аксіома 1 виконується). Враховуючи, що $A \subseteq U$ (рис. 141), одержуємо, що $S(A) \leqslant S(U)$, отже, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ (тобто властивість (2) виконується). Якщо події A і B несумісні, то фігури A і B не мають спільних точок. Тоді $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$. Отже,

$$P(A+B) = \frac{S(A \cup B)}{S(U)} = \frac{S(A)+S(B)}{S(U)} = \frac{S(A)}{S(U)} + \frac{S(B)}{S(U)} = P(A) + P(B),$$

тобто властивість (3) виконується (а значить, виконується і аксіома 3). ○

Оскільки різні означення імовірності задовольняють одним і тим самим основним властивостям (аксіомам), то наслідки, які можуть бути отримані з використанням цих аксіом, не залежать від способу означення імовірності. Тому надалі обґрунтування загальних властивостей імовірностей ми будемо проводити для одного означення — чи, як кажуть у математиці, для однієї імовірнісної моделі, — і мати на увазі, що аналогічне обґрунтування можна провести і для інших моделей. Хоча, звичайно, у кожній моделі можна вказати і свої специфічні властивості, яких немає в інших моделях.

З а у в а ж е н н я 2. Означення геометричної імовірності (8) можна використовувати не тільки в тому випадку, коли U — плоска фігура.

Якщо, наприклад, U — просторова фігура (тіло), то у випадку рівномірного розподілу імовірностей (у тому розумінні, що імовірності попадання точки u у частини даного тіла, що мають однакові об'єми, однакові і не залежать від положення цих частин у заданому тілі), в формулі (8) під записами $S(U)$ і $S(A)$ слід розуміти об'єми тіла U і його частини — тіла A.

Аналогічно, якщо U — відрізок, то у випадку рівномірного розподілу імовірностей (у тому розумінні, що імовірності попадання точки u у частини даного відрізка, які мають однакові довжини, однакові і не залежать від положення цих частин на заданому відрізку), в формулі (8) під записами $S(U)$ і $S(A)$ слід розуміти довжини відрізка U і його частини — відрізка A.

Зазначимо, що об'єм тіла U у просторі, площу плоскої фігури U на площині, довжину відрізка U на прямій можна назвати *мірою* фігури U. Тоді в загальному вигляді формулу (8) можна записати так:

$$P(A)=\frac{\text{міра } A}{\text{міра } U},$$

тобто в загальному випадку

геометричною імовірністю події A називається відношення міри фігури, сприятливої для події A, до міри всієї заданої фігури.

Приклад 2 Дві подруги домовилися зателефонувати в проміжку від 9 год до 10 год. Знайдіть імовірність того, що їх розмова почнеться в проміжку від 9 год 20 хв до 9 год 25 хв.

▶ Одна подруга може зателефонувати іншій в проміжку від 9.00 до 10.00. У цій задачі експеримент — це фіксування часу телефонного дзвінка. Зобразимо всі результати експерименту у вигляді відрізка AB (рис. 141). Елементарні події — це точки відрізка AB (одна подруга може викликати іншу в будь-який час з 9.00 до 10.00). Якщо подія A — виклик відбувся в проміжку 9.20 – 9.25, то сприятливі для події A результати — це точки відрізка CD. Якщо вважати, що час виклику по домовленому проміжку розподіляється рівномірно, то

$$P(A)=\frac{\text{міра } CD}{\text{міра } AB}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}\approx 0{,}08.$$

(При обчисленні враховано, що в хвилинах міра CD дорівнює 5, а міра AB дорівнює 60 (1 год = 60 хв).) ◁

Приклад 3* До сигналізатора надходять сигнали від двох пристроїв, причому надходження кожного із

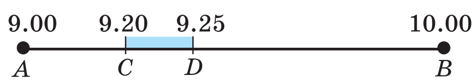


Рис. 141

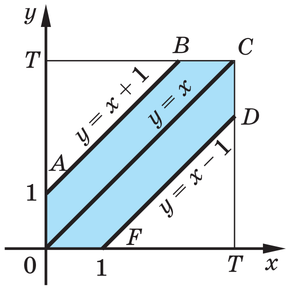


Рис. 142

сигналів рівноможливе в будь-який момент проміжку часу тривалістю T хв. Моменти надходження сигналів незалежні один від іншого. Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менша 1 хв. Знайдіть імовірність того, що сигналізатор спрацьовує за час T, якщо кожен з пристроїв пошле по одному сигналу.

▶ Виберемо проміжок часу тривалістю T, наприклад $[0; T]$. Позначимо моменти надходження сигналів першого і другого пристроїв відповідно через x і y. З умови задачі випливає, що повинні виконуватися подвійні нерівності: $0 \leqslant x \leqslant T$, $0 \leqslant y \leqslant T$.

Введемо прямокутну систему координат xOy. У цій системі подвійним нерівностям задовольняють координати будь-якої точки, що належить квадрату $OTCT$. Таким чином, цей квадрат можна розглядати як фігуру G, координати точок якої задають усі можливі значення моментів надходження сигналів.

Сигналізатор спрацьовує, якщо різниця між моментами надходження сигналів менше 1 хв, тобто якщо $y - x < 1$ при $y > x$ і $x - y < 1$ при $x > y$, що рівносильно нерівностям

$$y < x + 1 \text{ при } y > x, \tag{9}$$

$$y > x - 1 \text{ при } y < x. \tag{10}$$

Нерівності (9) виконуються для координат тих точок фігури G, що лежать вище прямої $y = x$ і нижче прямої $y = x + 1$; нерівності (10) мають місце для координат точок, розташованих нижче прямої $y = x$ і вище прямої $y = x - 1$.

Як видно із рисунка 142, усі точки, координати яких задовольняють нерівностям (9) і (10), належать заштрихованому шестикутнику $OABCDF$. Таким чином, цей шестикутник можна розглядати як фігуру g, координати точок якої є сприятливими моментами часу x і y для спрацювання сигналізатора.

Враховуючи, що

$$\text{площа } g = 2S_{OABC} = 2 \cdot (S_{\triangle OTC} - S_{\triangle ATB}) =$$

$$= 2S_{\triangle OTC} - 2S_{\triangle ATB} = T^2 - (T-1)^2 = 2T - 1,$$

одержуємо, що шукана імовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{\text{площа } g}{\text{площа } G} = \frac{2T-1}{T^2}. \ \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Поясніть, у чому полягає експеримент при геометричному означенні імовірності.
2. Дайте означення геометричної імовірності. У яких випадках його можна використовувати? Наведіть приклади.

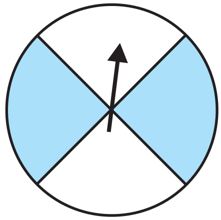


Рис. 143

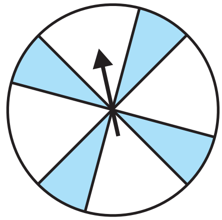


Рис. 144

Вправи

1°. Єгор і Данило домовилися: якщо стрілка вертушки (рис. 143) зупиниться на білому полі, то огорожу буде фарбувати Єгор, а якщо на синьому полі — Данило. У кого з хлопчиків більше шансів фарбувати огорожу?

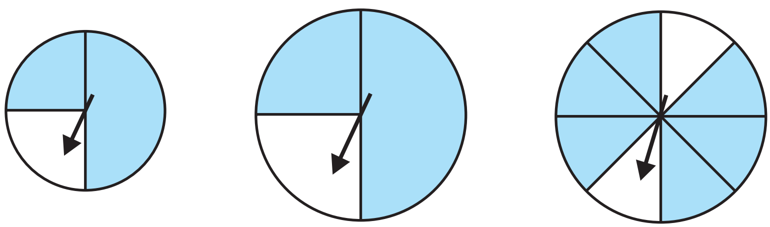
2°. Два приятелі за допомогою вертушки (рис. 144) вирішують, як їм провести вихідний: якщо стрілка зупиниться на білому, вони підуть у кіно, якщо на синьому — на стадіон. Яка з подій імовірніше: приятелі підуть на стадіон чи в кіно?

3°. Ви виграєте, якщо стрілка вертушки зупиняється на білому. Яка з вертушок, зображених на рисунку 145, дає вам більше шансів на виграш?

4. У коло радіуса R вписано квадрат. У круг, обмежений заданим колом, навмання поставили точку. Знайдіть імовірність того, що ця точка буде знаходитися в середині квадрата, вважаючи, що імовірність попадання точки в частину круга пропорційна площі цієї частини і не залежить від її розміщення в крузі.

5. У сферу радіуса R вписано куб. У кулю, обмежену заданою сферою, навмання кинули точку. Знайдіть імовірність того, що ця точка буде знаходитися в середині куба, вважаючи, що імовірність попадання точки в частину кулі пропорційна об'єму цієї частини і не залежить від її розміщення в кулі.

6. На відрізку L довжиною 20 см розмістили менший відрізок l довжиною 10 см. Знайдіть імовірність того, що точка, навмання поставлена на більший відрізок, попаде на менший відрізок. Передбачається, що



а *б* *в*

Рис. 145

імовірність попадання точки на відрізок пропорційна довжині відрізка і не залежить від його розміщення.

7*. *Задача про зустріч.* Два друга домовилися зустрітися в певному місці між 12 год і 13 год. Той, хто прийде першим, буде чекати другого $\frac{1}{4}$ год, після чого покине місце зустрічі. Знайдіть імовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожен з друзів вибирає навмання момент свого прибуття (у проміжку від 12 год до 13 год).

Вказівка. Для спрощення будемо вважати, що зустріч може відбутися між 0 год і 1 год. Зручно позначити час прибуття першого друга на місце зустрічі через x, а другого — через y і ввести прямокутну систему координат xOy.

19.5. Умовні імовірності

Таблиця 30

1. Поняття умовної імовірності	
Змістовне означення	Формула
Число, яке виражає імовірність події A за умови, що відбулася подія B, називається *умовною імовірністю* події A за умови події B і позначається $P_B(A)$ або $P(A \mid B)$.	$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
2. Імовірність добутку двох подій (теорема множення імовірностей)	
$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$	*Імовірність добутку (тобто сумісної появи) двох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої події, яка обчислена за умови, що перша подія вже відбулася.*
3. Імовірність добутку декількох подій	
$P(A_1A_2...A_n) =$ $= P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3)...P_{A_1A_2...A_{n-1}}(A_n)$	*Імовірність добутку (тобто сумісної появи) декількох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності інших, причому імовірність кожної наступної події обчислюється за умови, що всі попередні події вже відбулися.*

Пояснення й обґрунтування

Поняття умовної імовірності. Імовірність добутку двох подій. Оцінюючи імовірність випадкової події A, іноді доводиться враховувати якісь додаткові умови, що впливають на оцінку імовірності цієї події. Наприклад, якщо подія A — це випадання 3 очок при підкиданні грального кубика, то її імовірність дорівнює $\frac{1}{6}$ (рівноможливі елементарні події — це випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок). Але якщо відомо, що вже відбулася подія B — випадання непарного числа очок при киданні грального кубика, то після цієї інформації імовірність події A стає рівною $\frac{1}{3}$ (рівноможливі елементарні події — це випадання непарної кількості очок, тобто 1, 3, 5 очок). Також при одержанні інформації про те, що вже відбулася подія B, імовірність випадання 6 очок дорівнює нулю.

Таким чином, одержання деякої інформації про результати випадкового експерименту означає, що при підрахунку імовірності події A замість усього простору елементарних подій U потрібно брати ту його частину, елементарні події якої сприяють події B (тому позначимо її через B).

Число, яке виражає імовірність події A за умови, що відбулася подія B, називається *умовною імовірністю події A за умови події B* і позначається $P_B(A)$ або $P(A \mid B)$.

Умовна імовірність події A за умови події B обчислюється за формулою

$$P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \quad (\text{де } P(B) > 0). \tag{9}$$

Доведемо цю формулу для класичного означення імовірності. Нехай у результаті випадкового експерименту ми можемо одержати n рівноможливих елементарних подій (простір U). З цих подій m подій сприяють події A, k — події B, l — події AB (рис. 146). Тоді $P(A) = \frac{m}{n}$, $P(B) = \frac{k}{n}$, $P(AB) = \frac{l}{n}$. Знайдемо імовірність події A за умови події B. Як уже відзначалося, для обчислення умовної імовірності замість усього простору елементарних подій U потрібно брати тільки ту його частину, елементарні події якої сприяють події B. У цьому випадку загальна кількість результатів експерименту дорівнює k. З них події A сприятимуть тільки l елементарних подій, які складають подію AB. Тоді

$$P_B(A) = \frac{l}{k} = \frac{\frac{l}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

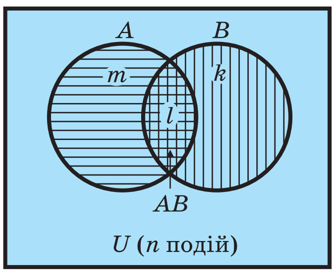


Рис. 146

Зазначимо, що рівність (9) часто приймається за означення умовної імовірності події A за умови, що відбулася подія B.

З рівності (9) одержуємо, що

$$P(AB) = P(B) \cdot P_B(A). \tag{10}$$

Оскільки подія BA співпадає з подією AB, то в правій частині останньої формули можна поміняти місцями A і B. Тоді

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{11}$$

Імовірність добутку (тобто сумісної появи) двох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої події, яка обчислена за умови, що перша подія вже відбулася.

Рівність (11) (чи (10)) звичайно називають *теоремою множення імовірностей*. Якщо ми можемо обчислити імовірність події A і умовну імовірність $P_A(B)$, то за формулою (11) легко знайти імовірність $P(AB)$ добутку подій A і B.

Приклад 1 У коробці знаходиться 10 куль, з них 4 білі. Навмання беруть одну за одною дві кулі, причому взяту кулю до коробки не повертають. Обчислимо імовірність того, що обидві кулі будуть білі.

▶ Позначимо події: A — перша витягнута куля біла, B — друга витягнута куля біла. Тоді подія AB — обидві витягнуті кулі білі.

Витягання (навмання) з коробки будь-якої з 10 куль — рівноможливі події. Сприятливими для події A є 4 події (у коробці всього 4 білі кулі). Тоді $P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. Після витягання однієї білої кулі (відбулася подія A) у коробці залишиться 9 куль і з них тільки 3 білі, отже, $P_A(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Тоді за формулою множення імовірностей (11) одержуємо

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}. \ \triangleleft$$

Приклад 2 Серед однотипних деталей, які випускають у цеху, 1 % бракованих. Серед якісних деталей 40 % деталей вищого ґатунку. Яка імовірність того, що взята навмання деталь вищого ґатунку?

▶ Позначимо події: A — деталь не бракована, B — деталь вищого ґатунку. Тоді подія AB — вибрали якісну деталь вищого ґатунку.

Вибір однієї деталі з множини однотипних деталей — рівноможливі події. Враховуючи, що серед випущених деталей 99 % якісних, одержуємо $P(A) = 0{,}99$, а враховуючи, що серед якісних деталей 40 % деталей вищого ґатунку, одержуємо, що $P_A(B) = 0{,}4$. Тоді

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = 0{,}99 \cdot 0{,}4 = 0{,}396. \ \triangleleft$$

Формула множення імовірностей (10) узагальнюється на випадок декількох подій $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) \dots P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n), \quad (12)$$

де $P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n)$ позначає умовну імовірність події A_n, обчислену за умови, що всі події $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ уже відбулися. Отже,

імовірність добутку (тобто сумісної появи) декількох подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовні імовірності інших, причому імовірність кожної наступної події обчислюється за умови, що всі попередні події вже відбулися.

Приклад 3 У коробці лежить 6 білих, 4 чорних і 3 червоні кулі. Навмання одну за одною беруть три кулі, причому взяту кулю до коробки не повертають. Знайдіть імовірність того, що перша куля буде червоною, друга — білою і третя — чорною.

▶ Нехай подія A — перша куля червона, подія B — друга куля біла, подія C — третя куля чорна. Тоді подія ABC — вибрали три кулі, з яких перша червона, друга біла і третя чорна.

У коробці всього 13 куль. Витягання (навмання) будь-якої з 13 куль — рівноможливі події. Сприятливими для події A є 3 події (у коробці всього 3 червоні кулі). Тоді $P(A) = \frac{3}{13}$. Після витягання однієї червоної кулі (відбулася подія A) у коробці залишиться 12 куль і з них тільки 6 білих, отже, $P_A(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Після витягання однієї червоної і однієї білої кулі (відбулися події A і B, тобто подія AB) у коробці залишиться 11 куль і з них тільки 4 чорних, отже, $P_{AB}(C) = \frac{4}{11}$. Тоді за узагальненою формулою множення імовірностей (12) одержуємо

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{3}{13} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{11} = \frac{6}{143}. \ \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Поясніть зміст поняття умовної імовірності події A за умови події B. Наведіть приклади.
2*. Обґрунтуйте формулу $P_B(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ (де $P(B) > 0$) для випадку класичного означення імовірності.
3. Сформулюйте теорему множення імовірностей. Наведіть приклад її використання.
4. Поясніть, як можна обчислити імовірність добутку (тобто сумісної появи) декількох подій. Наведіть приклад обчислення такої імовірності.

Вправи

1. В ящику знаходиться десять деталей, з яких чотири пофарбовані. Робітник навмання по одній виймає дві деталі. Знайдіть імовірність того, що:
1°) друга деталь пофарбована, якщо перша пофарбована;
2°) друга деталь пофарбована, якщо перша не пофарбована;
2) обидві деталі пофарбовані;
3) обидві деталі не пофарбовані.

2. У коробці знаходиться 5 білих і 4 чорні кулі. З коробки навмання виймають одну за одною дві кулі (кулі в коробку не повертають). Знайдіть імовірність того, що друга куля біла, якщо перша: 1) біла; 2) чорна.

3. На деякому підприємстві 95 % продукції вважається якісною. З якісних виробів 75 % становлять вироби першого ґатунку, решта — другого. Знайдіть імовірність того, що виріб, виготовлений на цьому підприємстві, виявився другого ґатунку.

4. У читальному залі є шість підручників з математики, з яких три в твердій обкладинці. Бібліотекар навмання взяв два підручники. Знайдіть імовірність того, що обидва підручники будуть у твердій обкладинці.

5. У коробці лежить 12 червоних, 8 зелених і 10 синіх куль. Навмання одну за одною беруть три кулі, причому взяту кулю до коробки не повертають. Знайдіть імовірність того, що перша куля буде червоною, друга — зеленою і третя — синьою.

19. 6. Незалежні події

Таблиця 31

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття незалежності двох подій</td></tr>
<tr><td>Зміст</td><td>Означення</td></tr>
<tr><td>Подія B називається незалежною від події A, якщо поява події A не змінює імовірності події B.</td><td>Події A і B називаються незалежними, якщо виконується рівність
$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$
(імовірність їх добутку, тобто сумісної появи, дорівнює добутку імовірностей цих подій).</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Незалежність декількох подій</td></tr>
<tr><td colspan="2">Декілька подій називаються незалежними, якщо для будь-якої підмножини цих подій (що містить дві або більше подій) імовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей.
Зокрема,
якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні, то
$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n)$$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 31

3. Властивість незалежних подій
Якщо ми маємо сукупність незалежних подій, то, замінивши деякі з цих подій на протилежні їм події, знову одержимо сукупність незалежних подій. Наприклад, *якщо події* A *і* B *незалежні, то незалежними будуть також події* A і $\bar{B}$, $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.
4. Імовірність здійснення хоча б однієї з незалежних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$
$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n))$

Пояснення й обґрунтування

Подія B називаються незалежною від події A, якщо поява події A не змінює імовірності події B. У цьому випадку

$$P_A(B) = P(B).$$

Тоді за формулою множення імовірностей

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(A) \cdot P(B).$$

Отриману рівність найчастіше приймають за загальне означення незалежності подій.

Події A і B називаються *незалежними*, якщо виконується рівність

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B), \tag{13}$$

отже, *дві події називаються незалежними, якщо імовірність їх добутку (тобто сумісної появи) дорівнює добутку імовірностей цих подій.*

Рівність (13) обов'язково буде виконуватися, якщо одна з подій неможлива або вірогідна. Наприклад, якщо подія B — неможлива, тобто $B = \varnothing$, то $AB = \varnothing$. Отже, $P(AB) = 0$ і $P(B) = 0$, тобто рівність (13) виконується. Якщо подія B — вірогідна, тобто $B = U$, то $AB = AU = A$. Тоді $P(AB) = P(A)$ і $P(B) = 1$, отже, рівність (13) виконується і в цьому випадку. Таким чином, *якщо хоча б одна з двох подій неможлива або* вірогідна, *то такі дві події незалежні.*

Зазначимо, що у випадку, коли події A і B не є неможливими чи вірогідними і виконується рівність $P_A(B) = P(B)$ (подія B є незалежною від події A), то $P_B(A) = P(A)$ (тобто подія A є незалежною від події B). Дійсно, за формулою множення імовірностей $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A)$. Тоді

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \tag{14}$$

Підставляючи в останню рівність замість $P_A(B)$ рівне йому число $P(B)$ і скорочуючи обидві частини на $P(B) \neq 0$, одержуємо, що $P_B(A) = P(A)$. Це підтверджує інтуїтивно зрозумілий факт, що у випадку, коли подія B не залежить від події A, то і подія A не залежить від події B.

Зауважимо, що у *випадку, коли події* A *і* B *незалежні, то незалежними будуть також події* A *і* $\bar{B}$, $\bar{A}$ *і* B, $\bar{A}$ *і* $\bar{B}$.

Доведемо, наприклад, що будуть незалежними події A і $\bar{B}$. Якщо події A і B незалежні, то за означенням $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Коли відбувається подія A, то в цей час подія B може або відбуватися, або не відбуватися. Отже, можна стверджувати, що подія A відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються або події A і B, або події A і $\bar{B}$. Тобто $A = AB + A\bar{B}$. Враховуючи, що події AB і $A\bar{B}$ несумісні (оскільки події B і $\bar{B}$ — несумісні), і те, що $P(\bar{B}) = 1 - P(B)$, одержуємо $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$. Тоді

$$P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A) \cdot (1 - P(B)) = P(A) \cdot P(\bar{B}).$$

А це й означає, що події A і $\bar{B}$ незалежні.

Аналогічно обґрунтовується незалежність подій $\bar{A}$ і B, $\bar{A}$ і $\bar{B}$.

Поняття незалежності подій може бути поширено на будь-яку скінченну кількість подій.

Декілька подій називаються незалежними (ще говорять — **«незалежними в сукупності»), якщо для будь-якої підмножини цих подій (що містить дві або більше подій) імовірність їх добутку дорівнює добутку їх імовірностей.**

Наприклад, три події A, B, C будуть незалежними, якщо виконуються умови:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),\ P(AC) = P(A) \cdot P(C),\ P(BC) = P(B) \cdot P(C),$$
$$P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

З означення випливає, що у випадку, **коли події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні, то**

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n) \qquad (15)$$

(але виконання цієї рівності при $n > 2$ ще не означає, що події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні).

Як і для двох подій, можна довести, що у випадку, коли ми маємо деяку сукупність незалежних подій, то, замінивши деякі з цих подій протилежними їм подіями, знову одержимо сукупність незалежних подій.

Відзначимо, що наведені означення незалежності подій у теоретико-імовірнісному розумінні відповідають звичайному розумінню незалежності подій як відсутності впливу одних подій на інші. Тому при розв'язуванні задач можна користуватися таким принципом: *причинно незалежні події незалежні і в теоретико-імовірнісному розумінні.*

Приклад 1 Прилад складається з трьох вузлів, кожен з яких протягом доби може вийти з ладу незалежно від інших. Якщо не працює хоча б один з вузлів, то прилад теж не працює. Імовірність безвідмовної роботи протягом доби першого вузла дорівнює 0,95, другого — 0,9, третього — 0,85.

Знайдіть імовірність того, що протягом доби прилад працюватиме безвідмовно.

▶ Нехай подія A_1 — перший вузол справний, подія A_2 — другий вузол справний, подія A_3 — третій вузол справний, подія A — протягом доби прилад працює безвідмовно. Оскільки прилад працює безвідмовно тоді і тільки тоді, коли справні всі три вузли, то $A = A_1A_2A_3$. За умовою події A_1, A_2, A_3 — незалежні, отже,

$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3) = 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}72675 \approx 0{,}73.$ ◁

Приклад 2 Два стрільці зробили по одному пострілу в одну мішень. Імовірність стрільця влучити в мішень для першого дорівнює 0,9, для другого — 0,8. Знайдіть імовірність того, що мішень буде вражена.

▶ Розглянемо такі події: A — перший стрілець влучив у мішень, B — другий стрілець влучив у мішень, C — мішень уражена. Події A і B незалежні, але безпосередньо використати в даному випадку множення імовірностей не можна, оскільки подія C настає не тільки тоді, коли обидва стрільці влучили в мішень, але і тоді, коли в мішень влучив хоча б один із них.

Будемо міркувати інакше. Розглянемо події $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, протилежні відповідно до подій A, B, C. Оскільки події A і B незалежні, то події $\bar{A}$, $\bar{B}$ — теж незалежні. Якщо $P(A) = 0{,}9$, то $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$. Якщо

$P(B) = 0{,}8$, то $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$

Враховуючи, що мішень не буде уражена тоді і тільки тоді, коли в неї не влучить ні перший стрілець, ні другий, одержуємо, що $\bar{C} = \bar{A}\bar{B}$. Тоді

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02.$$

Оскільки події C і $\bar{C}$ протилежні, то

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$ ◁

З а у в а ж е н н я. Міркування, використані при розв'язуванні прикладу 2, можна узагальнити.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ незалежні, то події $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, ..., $\bar{A}_n$ теж незалежні (і $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$, де $i = 1, 2, \ldots, n$). Для знаходження імовірності появи хоча б однієї з незалежних подій A_1, A_2, ..., A_n, тобто події $C = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, можна знайти імовірність протилежної події $\bar{C}$. Подія $\bar{C}$ буде виконуватися тоді і тільки тоді, коли не буде виконуватися ні подія A_1, ні подія A_2, ..., ні подія A_n, тобто $\bar{C} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n$. Тоді

$$P(\bar{C}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n) =$$
$$= (1 - P(A_1)) \cdot (1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Враховуючи, що $P(C)=1-P(\overline{C})$, одержуємо, що *імовірність здійснення хоча б однієї з незалежних подій* A_1, A_2, ..., A_n можна обчислити за формулою

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1-(1-P(A_1))\cdot(1-P(A_2))\cdot\ldots\cdot(1-P(A_n)).$$

Звичайно, наведену формулу не обов'язково запам'ятовувати, достатньо при розв'язуванні задач на знаходження імовірності появи хоча б однієї з незалежних подій повторити наведені вище міркування.

Запитання для контролю

1. Поясніть, у якому випадку подія B називається незалежною від події A.
2. Дайте означення незалежності двох подій. Користуючись цим означенням, доведіть, що в експерименті по витяганню карт з колоди (36 карт) незалежними є події: A — витягли даму, B — витягли бубнову карту.
3*. Відомо, що події A і B незалежні. Обґрунтуйте незалежність подій $\overline{A}$ і B, A і $\overline{B}$, $\overline{A}$ і $\overline{B}$.
4. Поясніть, як розуміють незалежність (тобто незалежність у сукупності) трьох подій K, M, N.
5. Запишіть формулу для знаходження імовірності добутку декількох незалежних подій. Наведіть приклад її використання.

Вправи

1°. Імовірність того, що стрілець при одному пострілі влучить у ціль, дорівнює 0,8. Стрілець виконав два постріли. Знайдіть імовірність того, що при обох пострілах стрілець влучив у ціль.

2°. Одночасно кинули монету і гральний кубик. Знайдіть імовірність одночасного випадання «герба» на монеті і 1 очка на кубику.

3°. В одній партії електролампочок 3 % бракованих, а в другій — 4 % бракованих. Навмання беруть по одній лампочці з кожної партії. Знайдіть імовірність того, що обидві лампочки виявляться бракованими.

4. Кидають два гральних кубики. Знайдіть імовірність того, що на одному кубику випаде 1 очко, а на другому — більше трьох очок.

5. Три стрільці, для яких імовірності влучення в мішень дорівнюють 0,8, 0,75, 0,7, роблять по одному пострілу по одній мішені. Знайдіть імовірність того, що:

1°) всі три стрільці влучать у мішень;
2) хоча б один із стрільців влучить у мішень;
3) тільки один із стрільців влучить у мішень;
4) тільки два із стрільців влучать у мішень.

6. Імовірність зупинки за зміну одного станка, що працює в цеху, дорівнює 0,15, а другого — 0,16. Знайдіть імовірність того, що обидва станки за зміну не зупиняться.

7. Пристрій містить два незалежних елементи. Імовірністі відмови елементів відповідно дорівнюють 0,05 і 0,08. Знайдіть імовірність відмови пристрою, якщо для цього досить, щоб відмовив хоча б один елемент.

8*. Імовірність хоча б одного влучення стрільцем у мішень при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайдіть імовірність влучення при одному пострілі.

9*. Імовірність того, що при одному пострілі стрілець влучить у ціль, дорівнює 0,5. Скільки пострілів повинен виконати стрілець, щоб з імовірністю не менше 0,9 влучити у ціль хоча б один раз?

19. 7. Схема Бернуллі. Закон великих чисел

Таблиця 32

1. Поняття експериментів, незалежних відносно події *A*	
Якщо імовірність здійснення події A в кожному експерименті не залежить від результатів інших експериментів, то такі експерименти називають *незалежними відносно події* A.	**Приклад.** Нехай подія A — випадання «герба». Тоді експерименти по підкидання однієї і тієї самої монети приблизно в однакових умовах є незалежними відносно події A.
2. Схема Бернуллі (сукупність умов)	
Нехай відбувається n незалежних експериментів, у кожному з яких подія A може здійснитися, а може не здійснитися. Імовірність здійснення події A в кожному з експериментів однакова і дорівнює p, а імовірність нездійснення події A (тобто здійснення події $\overline{A}$) є $q=1-p$.	
3. Формула Бернуллі	
Імовірність $P_{m,n}$ того, що в n незалежних експериментах подія A здійсниться точно m разів, дорівнює $$P_{m,n}=C_n^m p^m q^{n-m}$$	**Приклад.** Знайдіть імовірність того, що при 6 підкиданнях монети «герб» випаде точно 4 рази. ▶ Для цієї задачі умови схеми Бернуллі такі: $n=6,\ m=4,\ p=\frac{1}{2},\ q=1-p=\frac{1}{2}$. Тоді $P_{4,6}=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{15}{64}\approx 0{,}23.$ ◁

Продовж. табл. 32

3*. Нерівність Чебишова	
Нехай імовірність здійснення події A в експерименті дорівнює p (тоді *імовірність нездійснення події A є* $q = 1 - p$) *і нехай проводяться серії, що складаються з n незалежних повторень цього експерименту. Через m позначимо число експериментів, у яких відбувалася подія A. Тоді для будь-якого додатного числа a виконується нерівність* $$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > a\right) < \frac{pq}{a^2 n}.$$	
4. Закон великих чисел (найпростіша форма)	
Зміст	Математичний запис*
При великій кількості експериментів відносна частота події, як правило, мало відрізняється від імовірності цієї події.	В умовах, сформульованих у нерівності Чебишова, $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| > a\right) = 0.$$

Пояснення й обґрунтування

1. Схема Бернуллі. Нехай проводяться декілька експериментів, результатом кожного з яких може бути одна і та сама подія A.

Якщо імовірність появи події A в кожному експерименті не залежить від результатів інших експериментів, то такі експерименти називають *незалежними відносно події A*. Розглянемо ті незалежні експерименти, у кожному з яких імовірність появи події A не змінюється від експерименту до експерименту. Зауважимо, що внаслідок незалежних експериментів завжди відбуваються незалежні події.

Наприклад, незалежними є декілька експериментів по підкиданню одного і того самого грального кубика в однакових умовах. Нехай подія A — це випадання 1 очка. Якщо кубик однорідний і має правильну геометричну форму, то в кожному з цих експериментів імовірність p здійснення події A однакова і дорівнює $\frac{1}{6}$ $\left(p = \frac{1}{6}\right)$. Зазначимо, що тоді й імовірність q нездійснення події A в кожному з цих експериментів теж однакова (це імовірність здійснення події $\overline{A}$, тому $q = 1 - p = \frac{5}{6}$).

Деякі практичні задачі зводяться до побудови математичної моделі проведення незалежних експериментів із двома результатами, імовірності яких p і q не змінюються від експерименту до експерименту. Сукупність умов для побудови такої моделі називається *схемою Бернуллі*.

* Матеріал є обов'язковим тільки для класів фізико-математичного профілю.

Нехай відбувається n незалежних експериментів, у кожному з яких подія A може здійснитися, а може не здійснитися. Імовірність здійснення події A в кожному з експериментів однакова і дорівнює p, а імовірність нездійснення події A (тобто здійснення події $\bar{A}$) є $q = 1 - p$.

Знайдемо імовірність $P_{m,n}$ того, що в n незалежних експериментах подія A здійсниться точно m разів (не важливо, у яких експериментах).

Шукану імовірність за вказаних умов можна обчислювати за ***формулою Бернуллі:***

$$\boldsymbol{P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}}.$$

Спочатку розглянемо один набір з n експериментів, у якому подія A здійсниться точно m разів у перших m експериментах (і відповідно, подія $\bar{A}$ здійсниться $n - m$ разів в останніх $n - m$ експериментах):

$$\underbrace{AA\ldots A}_{m \text{ разів}}\underbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}_{n-m \text{ разів}}. \qquad (16)$$

Оскільки за умовою результати n розглянутих експериментів є подіями, незалежними відносно події A, то імовірність появи такого набору подій дорівнює добутку імовірностей відповідних незалежних подій, тобто

$$\underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdot\ldots\cdot P(A)}_{m \text{ разів}}\cdot\underbrace{P(\bar{A})\cdot P(\bar{A})\cdot\ldots\cdot P(\bar{A})}_{n-m \text{ разів}} = \underbrace{p\cdot p\cdot\ldots\cdot p}_{m \text{ разів}}\cdot\underbrace{q\cdot q\cdot\ldots\cdot q}_{n-m \text{ разів}} = p^m q^{n-m}.$$

Всі інші сприятливі результати (того, що подія A здійсниться точно m разів у розглянутих n експериментах) можна записати у вигляді наборів, які відрізняються від набору (16) тільки тим, що події A і $\bar{A}$ стоять на інших місцях, але їх кількість залишається незмінною (n подій A і $n - m$ подій $\bar{A}$), а значить, незмінною буде й імовірність появи кожного набору ($p^m q^{n-m}$). Кількість одержаних різних наборів дорівнює C_n^m, тобто кількості можливостей вибору з n розглянутих експериментів тих m експериментів, у яких відбувається подія A (фактично кількості виборів m місць для літери A серед n місць у запису набору типу (16)). Одержані набори подій несумісні, отже, імовірність всіх сприятливих результатів (того, що подія A здійсниться точно m разів у розглянутих n експериментах) дорівнює сумі C_n^m чисел, кожне з яких дорівнює $p^n q^{n-m}$. Тоді одержуємо, що $P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$.

Враховуючи, що $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, **формулу Бернуллі** можна записати так:

$$\boldsymbol{P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}}.$$

Приклад 1 Знайдіть імовірність того, що при 10 підкиданнях грального кубика 1 очко випаде точно 2 рази.

▶ Усі умови схеми Бернуллі виконані. Подія A — випало 1 очко при підкиданні грального кубика. При всіх підкиданнях кубика імовірність випадання 1 очка (події A) однакова і дорівнює $\frac{1}{6}$ $\left(\text{тобто } p=\frac{1}{6}\right)$, тоді імовірність здійснення події $\bar{A}$: $q=1-p=\frac{5}{6}$. Крім того, за умовою $n = 10$, $m = 2$. Отже, за формулою Бернуллі

$$P_{2,\,10}=C_{10}^2p^2q^8=C_{10}^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8=\frac{10!}{2!\cdot 8!}\cdot\frac{5^8}{6^{10}}=\frac{10\cdot 9\cdot 5^8}{1\cdot 2\cdot 6^{10}}=\frac{9\cdot 5^9}{6^{10}}\approx 0{,}291.\ \triangleleft$$

Приклад 2 Імовірність того, що витрата електроенергії протягом доби не перевищує встановлену норму, дорівнює 0,75. Знайдіть імовірність того, що в найближчі 6 діб витрати електроенергії впродовж 4 діб не будуть перевищувати норму.

▶ Подія A — витрата електроенергії протягом доби не перевищує встановлену норму. Кожної доби імовірність події A однакова: $p = 0,\ 75$, тоді імовірність події $\bar{A}$ (перевитрата електроенергії протягом доби) $q = 1 - p = 0{,}25$. Отже, всі умови схеми Бернуллі виконані. Шукана імовірність за формулою Бернуллі дорівнює

$$P_{4,\,6}=C_6^4p^4q^2=\frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^2=\frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot 0{,}75^4\cdot 0{,}25^2\approx 0{,}30.\ \triangleleft$$

Обчислення за формулою Бернуллі при великих значеннях m і n утруднене. У математиці запропоновані наближені формули, які дозволяють знаходити наближені значення для $P_{m,\,n}$ і, що навіть більш важливо для практики, знаходити суми значень $P_{m,\,n}$, таких, що дріб $\frac{m}{n}$ (відносна частота здійснення події A) лежить у даних межах.

За формулою Бернуллі імовірність того, що в серії з 100 підкидань всі 100 разів випаде «герб», дорівнює $\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$, тобто приблизно 10^{-30}. Хоч і не така мала, але все ж таки дуже мізерна імовірність того, що «число» випаде точно 10 разів (відповідно «герб» випаде 90 разів) при 100 підкиданнях. Найбільш імовірно, що число випадань «герба» буде мало відрізнятися від 50.

Взагалі, як відмічалося в пункті 19.1 (див. с. 263), *при великій кількості експериментів відносна частота появи події, як правило, мало відрізняється від імовірності цієї події*. Математичне формулювання цього якісного твердження дає відкритий Я. Бернуллі *закон великих чисел*. Обґрунтування цього закону спирається на нерівність, відкриту П. Л. Чебишовим, яку ми без доведення сформулюємо у вигляді теореми.

Т е о р е м а. ***Нехай імовірність здійснення події A в деякому експерименті дорівнює p (а імовірність нездійснення події A, тобто здійснення події $\overline{A}$, є $q = 1 - p$) і нехай проводяться серії, що складаються з n незалежних повторень цього експерименту. Через m позначимо число експериментів, у яких відбувалася подія A. Тоді для будь-якого додатного числа a виконується нерівність***

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>a\right)<\frac{pq}{a^2n}. \qquad (17)$$

Пояснимо зміст цієї нерівності. Вираз $\frac{m}{n}$ дорівнює відносній частоті події A в серії експериментів, а $\left|\frac{m}{n}-p\right|$ — відхиленню цієї відносної частоти від теоретичного значення p. Нерівність $\left|\frac{m}{n}-p\right|>a$ означає, що відхилення виявилося більшим, ніж a. Але при постійному значенні a з ростом n права частина нерівності (17) прямує до нуля. Іншими словами, серії, у яких відхилення експериментальної частоти від теоретичної велике, складають малу частку всіх можливих серій експериментів. З нерівності Чебишова випливає твердження, отримане Я. Бернуллі, яке є найпростішою формою *закону великих чисел*:

в умовах теореми при будь-якому значенні $a > 0$ маємо

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|>a\right)=0. \qquad (18)$$

Для доведення цього твердження досить помітити, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{pq}{a^2n}=0.$

Зазначимо, що *в умовах теореми при будь-якому значенні* $\varepsilon > 0$ рівність (18) еквівалентна такій рівності:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1,$$

яка й означає, що *при збільшенні числа експериментів n частота* $\frac{m}{n}$ *здійснення події A наближається до імовірності здійснення події A в окремому експерименті.*

З а у в а ж е н н я. Під законом великих чисел звичайно розуміють не тільки наведене формулювання, а й ряд інших теорем, які обґрунтовують відмічену закономірність в застосуваннях математики до природознавства. Ця закономірність полягає в тому, що сумісна дія багатьох випадкових факторів часто приводить до результатів, які майже не залежать від цих випадкових факторів.

Приклад 3* Яку кількість експериментів достатньо провести, щоб рівність $p \approx \frac{m}{n}$ з точністю до 0,1 одержати з імовірністю 0,9?

▶ Для розв'язання досить знайти таке n, щоб (див. нерівність (17)) була виконана нерівність $\frac{pq}{0{,}1^2 n} < 0{,}1$. Враховуючи, що $q = 1 - p$, можна записати:

$$pq = p(1-p) = p - p^2 = \frac{1}{4} - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4}$$

і тому досить указати n, яке задовольняє нерівності $\frac{1}{4 \cdot 0{,}1^2 n} < 0{,}1$, звідси $n \geqslant 250$.

Як бачимо, одержання імовірності події з експерименту, навіть з такою незначною точністю, вимагає великого числа експериментів. Правда, більш глибокі теореми показують, що можна обмежитися меншим числом експериментів. ◁

Запитання для контролю

1. Поясніть, які експерименти називаються незалежними відносно події A. Наведіть приклади таких експериментів.
2. Запишіть формулу Бернуллі. Поясніть, у яких умовах її можна застосовувати.
3. Поясніть зміст найпростішої форми закону великих чисел.
4*. а) Запишіть нерівність Чебишова. Поясніть її зміст.
   б) Користуючись нерівністю Чебишова, обґрунтуйте найпростішу форму закону великих чисел.

Вправи

1°. Знайдіть імовірність того, що при 10 підкиданнях грального кубика п'ять очок випадуть рівно: 1) три рази; 2) один раз.

2. Знайдіть імовірність того, що при 10 підкиданнях грального кубика одне очко випаде не більш трьох разів.

3. Знайдіть імовірність того, що при 6 підкиданнях грального кубика число очок, кратне 3, випаде рівно: 1) два рази; 2) п'ять разів.

4. Що імовірніше виграти в рівносильного супротивника (нічийний результат не враховується):
1) три партії з чотирьох чи п'ять з восьми;
2*) не менше трьох партій з чотирьох чи не менше п'яти партій з восьми?

5°. У майстерні працюють 6 моторів. Для кожного мотора імовірність перегріву до обідньої перерви дорівнює 0,8. Знайдіть імовірність того, що до обідньої перерви:
1) перегріваються рівно 4 мотори; 2) перегріваються всі мотори;
3) жоден мотор не перегріється.

5. Імовірність появи події A в експерименті дорівнює 0,3. Експеримент повторили незалежним чином 5 разів. Знайдіть імовірність того, що подія A з'явиться не менше двох разів.

7*. Скільки досить провести експериментів, щоб рівність $p \approx \frac{m}{n}$ з точністю до 0,01 одержати з імовірністю 0,95?

8*. Яка імовірність того, що рівність $p \approx \frac{m}{n}$ виконується з точністю до 0,1 при проведенні 100 експериментів?

19.8. Поняття випадкової величини та її розподілу

Під *випадковою величиною* в теорії імовірностей розуміють змінну величину, яка в даному випадковому експерименті може набувати тих чи інших числових значень з певною імовірністю. Позначають випадкові величини великими латинськими літерами: $X, Y, Z, \ldots$, а їх значення — відповідними малими літерами: $x, y, z, \ldots$. Той факт, що випадкова величина X набула значення x, записують так: $X = x$.

Наприклад, у пункті 19.3 (с. 282) було знайдено імовірності появи тієї чи іншої суми очок при киданні двох гральних кубиків. Сума очок, що з'являється, — випадкова величина. Позначимо її через X. Тоді $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, ..., $x_{10} = 11$, $x_{11} = 12$ — значення випадкової величини X. Відповідну кожному значенню X імовірність його появи ($p_1, p_2, \ldots, p_{10}, p_{11}$*) указано в таблиці:

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

За допомогою цієї таблиці легко побачити, яких значень величина X набуває з однаковими імовірностями; яке значення величини X з'являється з більшою імовірністю і т. ін. Таку таблицю називають *таблицею розподілу значень випадкової величини за їх імовірностями* і кажуть, що ця таблиця задає *закон розподілу* розглянутої *випадкової величини*.

Наведемо означення розглянутих понять. Відзначимо, що випадкову величину можна задати в будь-якому випадковому експерименті. Для цього досить кожній елементарній події з простору елементарних подій експерименту поставити у відповідність якесь число (у цьому випадку кажуть, що задана числова функція, областю визначення якої є простір елементарних подій).

Випадковою величиною називається числова функція, областю визначення якої є простір елементарних подій.

* Таким чином, через p_i позначено імовірність події — випадкова величина X набула значення x_i. Це можна записати так: $P(X = x_i) = p_i$ (де $i = 1, 2, \ldots, 11$).

Наприклад, в експерименті по підкиданню монети простір елементарних подій складається з двох подій: u_1 — випадання «герба», u_2 — випадання «числа». (Ці події несумісні і в результаті експерименту обов'язково відбудеться одна з цих подій.) Якщо поставити у відповідність події u_1 число 1, а події u_2 — число 0 (тобто фактично вважати, що у випадку випадання «герба» випадає число 1, а у випадку випадання «числа» випадає 0), то одержимо випадкову величину X, яка набуває тільки двох значень: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (тобто $X(u_1) = x_1 = 1$, $X(u_2) = x_2 = 0$). Розглянуту функцію — випадкову величину X — можна задати також за допомогою таблиці:

Результат експерименту	u_1 — випав «герб»	u_2 — випало «число»
Значення X	1	0

Закон розподілу цієї випадкової величини задається таблицею:

X	1	0
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Зазначимо, що закон розподілу кожної випадкової величини встановлює відповідність між значеннями випадкової величини і їх імовірностями, тобто є функцією, областю визначення якої є всі значення випадкової величини. Тому

законом розподілу випадкової величини X називається функція, яка кожному значенню x випадкової величини X ставить у відповідність число $P(X = x)$ (імовірність події «випадкова величина X набула значення x»).

У загальному випадку закон розподілу випадкової величини, яка набуває тільки n значень, можна записати у вигляді таблиці

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Тут $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — усі різні значення випадкової величини X, а $p_i = P(X = x_i)$ (де $i = 1, 2, \ldots, n$) — імовірності, з якими X набуває цих значень.

Події $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_n)$ попарно несумісні, і їх сума є вірогідною подією. Тому сума імовірностей цих подій дорівнює 1, отже,

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Цю рівність часто використовують для перевірки правильності задання закону розподілу випадкової величини, особливо в тих випадках, коли закон розподілу задається не в результаті теоретичного розрахунку імовірностей подій з використанням класичного означення імовірності, а в результаті використання статистичного означення імовірності.

Наприклад, в експериментах по підкиданню кнопки, розглянутих у пункті 19.1, падіння кнопки на вістря чи на кружок може бути розглянуте як випадкова величина Y з умовними значеннями $y_1 = 1$ (падіння на вістря) і $y_2 = 0$ (падіння на кружок). Після проведення серії експериментів для деякої конкретної кнопки закон розподілу випадкової величини подано за допомогою таблиці, наведеної праворуч.

Y	1	0
P	0,45	0,55

(перевірка: $0{,}45 + 0{,}55 = 1$)

З а у в а ж е н н я. У тому випадку, коли доводиться знаходити суму всіх значень деякої величини, можна використовувати знак $\sum$ (читається: «Сума»), введений Л. Ейлером (1707 – 1783). Наприклад, якщо імовірність P набуває значення P_1, P_2, ..., P_k, то введемо позначення*:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \Sigma P.$$

Використовуючи це позначення, контроль за правильністю складання останньої таблиці можна записати так: $\Sigma P = 0{,}45 + 0{,}55 = 1$.

Розглянуті в цьому пункті випадкові величини набували ізольованих одне від одного значень. Такі величини називають *дискретними*** (від латинського *discretus* — роздільний, переривистий), а розподіл імовірностей такої величини називається *дискретним розподілом імовірностей*.

Якщо випадкова величина може набувати будь-якого значення з деякого проміжку, то така величина називається *неперервною*. Наприклад, час T чекання автобуса на зупинці є неперервною випадковою величиною у випадку, коли пасажир знає, що автобуси ходять через 10 хвилин, і приходить на зупинку випадковим чином. Ця випадкова величина набуває будь-якого числового значення $T \in [0; 10]$.

Очевидно, що число значень неперервної випадкової величини нескінченне незалежно від того, чи є проміжок значень обмеженим (відрізком) чи необмеженим. Тому ми не можемо для цієї величини задати закон розподілу так, як ми його задавали для дискретної випадкової величини (за допомогою таблиці, яка встановлювала відповідність між кожним значеннями випадкової величини і його імовірністю). Однак існує спосіб, за допомогою якого можна задати розподіл і неперервної випадкової величини***. Для цього проміжок значень заданої неперервної величини розбивають на частини і рахують імовірності попадання значень випадкової величини в кожну з них.

---

* Більш детально вказана сума записується так: $P_1 + P_2 + \ldots + P_k = \sum_{i=1}^{k} P_i$.

** Випадкова величина називається дискретною, якщо множина її значень скінченна або зчисленна (зчисленність означає, що ми можемо встановити взаємно однозначну відповідність між елементами заданої множини і натуральними числами, тобто можемо вказати, як можна занумерувати всі елементи множини).

*** Зауважимо, що в тому випадку, коли функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною функцією, такий розподіл імовірностей випадкової величини називають *неперервним розподілом імовірностей*.

Наприклад, нехай час горіння X (у годинах) електричної лампочки деякого виду $X \in [0; 1000]$. Проміжок [0; 1000] розділили на 5 однакових по довжині частин і за результатами горіння кожної з 100 експериментальних лампочок склали наступну таблицю розподілу випадкової величини:

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
P	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

(перевірка: $\Sigma P = 0,01 + 0,03 + 0,1 + 0,18 + 0,68 = 1$)

В останньому прикладі для обчислення імовірностей набування випадковою величиною певних значень було використано статистичне означення імовірності (імовірності були оцінені за результатами 100 експериментів, у яких лампочки горіли безперервно до перегорання нитки розжарення). У таких випадках зручно користуватися розширеною таблицею розподілу випадкової величини, включаючи до неї *розподіл розглянутої величини за частотами та за відносними частотами*. Тоді одержимо наступну таблицю розподілу випадкової величини X:

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
Частота $M = n(x)$	1	3	10	18	68
Відносна частота $W = \frac{n(X)}{n}$	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68
P	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

Враховуючи, що за законом великих чисел при значній кількості експериментів значення відносних частот близькі до відповідних імовірностей (в останній таблиці значення в третьому і четвертому рядку просто співпадають) рядок із значеннями імовірностей не вносять до таблиці розподілу, а замість нього іноді записують рядок із значеннями відносної частоти, вираженої у відсотках. Тоді відповідна таблиця розподілу значень випадкової величини X буде такою:

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
Частота $M = n(x)$	1	3	10	18	68
Відносна частота $W = \frac{n(X)}{n}$	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68
Відносна частота (у %)	1	3	10	18	68

Для контролю правильності заповнення такої таблиці використовують те, що сума відносних частот (як і сума відповідних імовірностей) дорівнює 1 ($\Sigma W = 1$, у відсотках — 100 %), а сума частот повинна дорівнювати кількості експериментів n ($\Sigma M = n$).

Розглянемо складання такої таблиці за результатами експериментів.

Приклад Вимірювання зросту 30 гімнасток одного спортивного клубу дали результати, які занесені в наступну таблицю:

148	148	148	149	149	149	149	150	150	151
151	151	151	151	151	151	151	152	152	152
152	152	153	153	153	153	153	153	154	154

За цими даними складіть таблицю розподілу значень випадкової величини X — зросту гімнасток клубу за частотами (M) і відносними частотами (W).

Розв'язання

Величина X набуває значень:

$$x_1 = 148,\ x_2 = 149,\ x_3 = 150,\ x_4 = 151,\ x_5 = 152,\ x_6 = 153,\ x_7 = 154.$$

Підраховуємо число M гімнасток кожного росту, заносимо дані в частотну таблицю, а потім для кожного значення X знаходимо значення відносної частоти W, знаючи, що $n = 30$. Одержуємо таблицю розподілу значень випадкової величини X:

X	148	149	150	151	152	153	154
M	3	4	2	8	5	6	2
$W = \frac{M}{n}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{15}$

(перевірка: $\Sigma M = 3 + 4 + 2 + 8 + 5 + 6 + 2 = 30 = n$;

$$\Sigma W = \frac{1}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{30}{30} = 1\Big) \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. а) Поясніть, що таке випадкова величина для даного випадкового експерименту. Наведіть приклади. б*) Дайте означення випадкової величини. Користуючись означенням, задайте якусь випадкову величину для експерименту по підкиданню двох монет.
2. Поясніть, що таке закон розподілу випадкової величини. Наведіть приклади.
3. Закон розподілу випадкової величини, яка набуває тільки n значень, задано у вигляді таблиці. Як можна перевірити правильність заповнення рядка із значеннями імовірностей у цій таблиці?

4. Поясніть, у чому полягає відмінність між дискретною і неперервною випадковими величинами. Наведіть приклади таких величин.
5. Поясніть, як можна задати розподіл для неперервної випадкової величини.

Вправи

1°. Складіть таблицю розподілу за імовірностями P випадкової величини X — числа очок, яке випадає при підкиданні звичайного грального кубика.

2. Є 3 гральних кубики, на гранях яких відмічені тільки одне чи два очка: у кубика A одне очко зустрічається на гранях один раз, у кубика B — 2 рази, а в кубика C — 3 рази (рис. 147). Випадкові величини X, $У$ і Z — число очок, що випало після підкидання відповідно на кожному з кубиків A, B і C.

Задайте закони розподілу випадкових величин X, $У$ і Z за допомогою відповідних таблиць.

3. На стіл кидають дві монети. Результату «герб» припишемо умовне числове значення 0, а результату «число» — 1. Складіть таблицю розподілу за імовірностями P значень випадкової величини X — суми чисел, що випали на монетах.

4*. Тричі кидають монету. Випадкова величина X — число випадань «герба». Задайте закон розподілу випадкової величини X за допомогою таблиці. (В к а з і в к а. Для обчислення відповідних імовірностей використайте формулу Бернуллі.)

5. У таблиці наведено розміри взуття 20 дівчат 11 класу:

34	35	35	35	36	36	36	36	37	37
37	37	37	37	38	38	38	39	39	40

За цими даними складіть таблицю розподілу значень випадкової величини X — розмір взуття дівчат 11 класу — за частотами (M) і за відносними частотами (W).

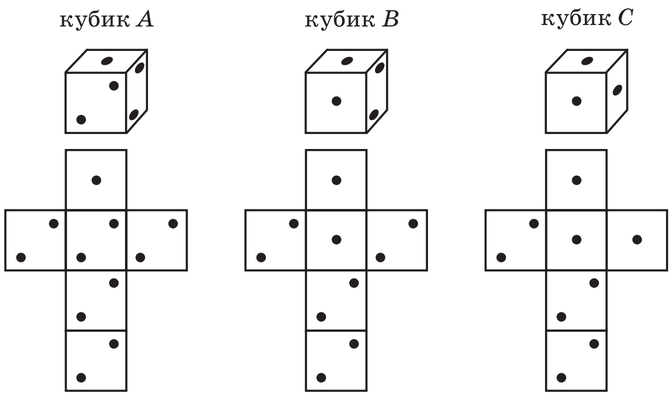


Рис. 147

6. У таблиці наведено розміри одягу 50 учнів 11 класу:

44	42	40	46	48	44	42	50	44	52
48	50	44	52	54	50	48	52	48	50
46	50	48	52	50	44	48	46	48	50
46	46	50	48	50	46	48	52	50	48
50	52	48	46	52	52	46	48	50	52

За цими даними складіть таблицю розподілу значень випадкової величини X — розмір одягу учнів 11 класу — за частотами (M) і за відносними частотами (W).

19. 9. Полігони і гістограми частот

1. Поняття полігону частот. Розподіл випадкових величин можна задавати і ілюструвати графічно.

Нехай випадкова величина X — розмір взуття 30 хлопців 11 класу однієї із шкіл — має розподіл за частотами, який подано в таблиці:

X	38	39	40	41	42	43	44	45	
M	2	2	5	7	6	4	3	1	$n = \Sigma M = 30$

Відмітимо на координатній площині точки з координатами $(x_1;\ m_1)$, $(x_2;\ m_2)$, ..., $(x_8;\ m_8)$ і з'єднаємо їх послідовно відрізками (рис. 148). Одержану ламану лінію називають *полігоном частот*.

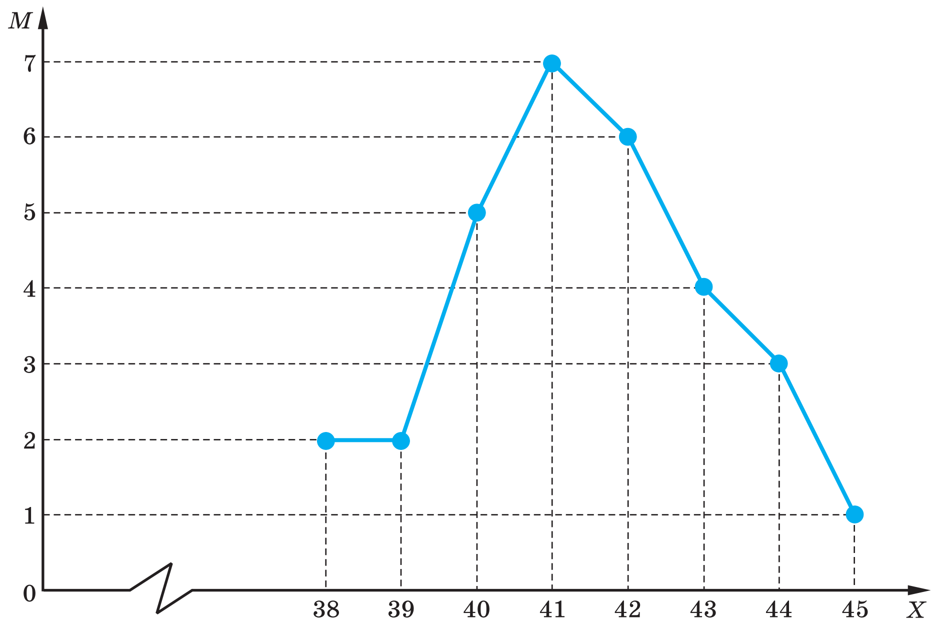


Рис. 148

Тобто

***полігоном частот* називають ламану, відрізки якої послідовно з'єднують точки з координатами $(x_1; m_1)$, $(x_2; m_2)$, ..., $(x_k; m_k)$, де x_i — значення випадкової величини, а m_i — відповідні їм частоти.**

Аналогічно означається і будується *полігон відносних частот* для випадкової величини X (будуються точки з координатами $(x_1; w_1)$, $(x_2; w_2)$, ..., $(x_k; w_k)$, де x_i — значення випадкової величини, а w_i — відповідні їм відносні частоти.

Якщо порахувати відносні частоти для кожного значення випадкової величини, розглянутої в прикладі на початку цього пункту, то розподіл величини X за відносними частотами можна задати таблицею:

X	38	39	40	41	42	43	44	45	
W	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{15}\approx 0{,}07$	$\frac{1}{6}\approx 0{,}17$	$\frac{7}{30}\approx 0{,}23$	$\frac{1}{5}=0{,}2$	$\frac{2}{15}\approx 0{,}13$	$\frac{1}{10}=0{,}1$	$\frac{1}{30}\approx 0{,}03$	$\Sigma W = 1$

Також розподіл випадкової величини X за відносними частотами можна подати у вигляді полігона відносних частот (рис. 149), у вигляді лінійної діаграми (рис. 150) або у вигляді кругової діаграми, попередньо записавши значення відносної частоти у відсотках (рис. 151).

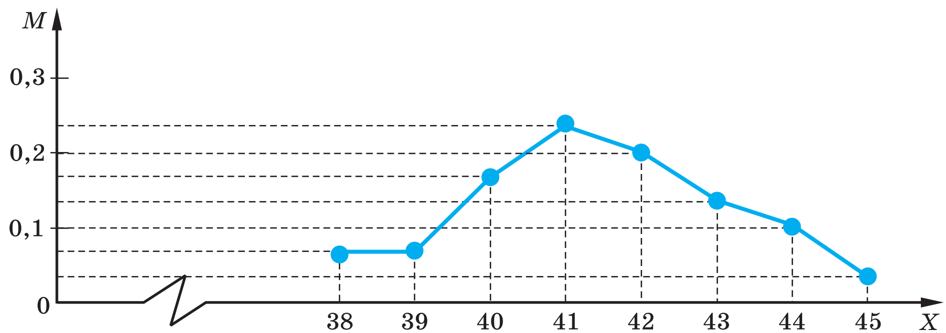


Рис. 149

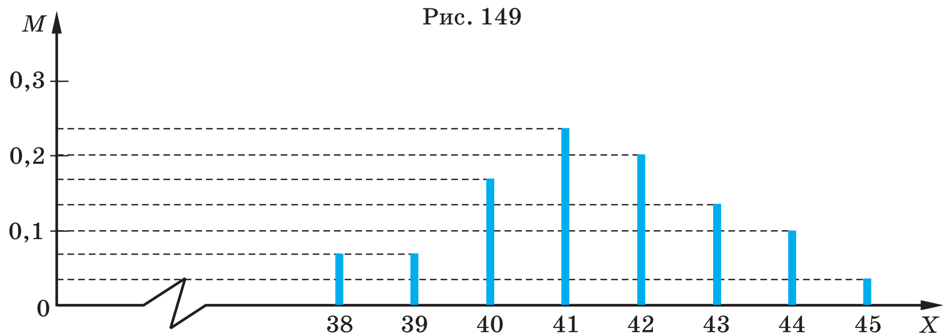


Рис. 150

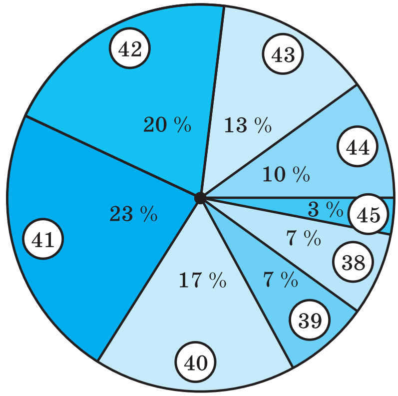


Рис. 151

Нагадаємо, що для побудови кругової діаграми круг розбивається на сектори, центральні кути яких пропорційні відносним частотам, обчисленим для кожного значення випадкової величини. Зауважимо, що кругова діаграма зберігає свою наочність і виразність тільки при невеликій кількості одержаних секторів. В іншому випадку її застосування малоефективне.

Якщо випадкова величина набуває багато різних значень, то її розподіл можна краще уявити після розбиття всіх її значень на класи (аналогічно до того, як ми розбивали значення неперервної випадкової величини в пункті 19.8 на с. 306). Кількість класів може бути будь-якою, зручною для дослідження (звичайно їх вибирають у кількості від 4 до 12). При цьому величини (об'єми) класів повинні бути однаковими.

Наприклад, у наступній таблиці подано відомості про заробітну платню 100 робітників одного підприємства. При цьому значення платні (округлені до цілого числа гривень) згруповані в 7 класів, кожний об'ємом у 100 грн.

Класи	Від 400 до 500	Від 500 до 600	Від 600 до 700	Від 700 до 800	Від 800 до 900	Від 900 до 1000	Від 1000 до 1100
Номер класу X	1	2	3	4	5	6	7
Частота (кількість робітників) M	4	6	18	36	22	10	4

(контроль: $\Sigma M = 100$)

Наочно частотний розподіл зарплат за класами можна подати за допомогою полігона частот (рис. 152) або стовбчастої діаграми (рис. 153).

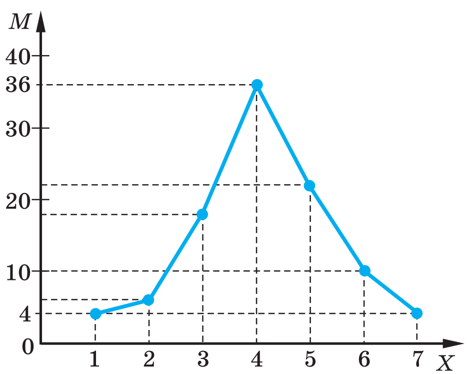


Рис. 152

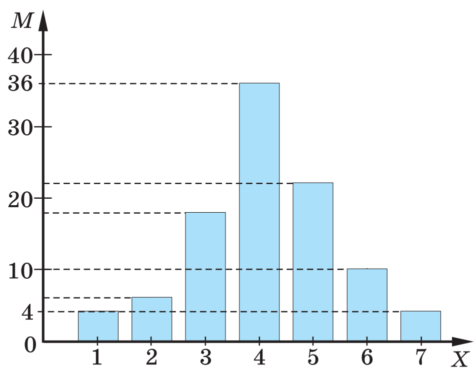


Рис. 153

Зауважимо, що в усіх наведених вище прикладах полігони частот будувалися для дискретних випадкових величин.

2. Поняття гістограми частот. Розподіл значень неперервної випадкової величини також можна подавати графічно. Для цього проміжок значень заданої неперервної величини розбивають на декілька рівних частин і рахують частоти попадання значень випадкової величини в кожну з цих частин.

Повернемося до таблиці частот, розглянутої в пункті 19.8 (с. 306). Нагадаємо, що випадкова величина X — час горіння (у годинах) електричної лампочки деякого виду (до перегорання нитки розжарення).

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
M	1	3	10	18	68

$\Sigma M = n = 100$

Дані з цієї таблиці можна подати за допомогою так званої *гістограми частот* — ступінчастої фігури (рис. 154).

Якщо основою кожного стовпця служить проміжок значень випадкової величини довжиною h, то висоту стовпця беруть рівною $\frac{M}{h}$ (це відношення називається *щільністю частоти* на розглянутому проміжку), де M — частота значень величини X на відповідному проміжку. Тоді площа такого стовпця буде дорівнювати $\frac{M}{h} \cdot h = M$, а площа фігури під гістограмою дорівнює

$$\Sigma M = n.$$

З а у в а ж е н н я. Якщо домовитися, що одиниця на горизонтальній осі відповідає величині h (у нашому прикладі $h = 200$ год), а одиниця на вертикальній осі — частоті, що дорівнює 1, то побудована на рис. 156 гістограма задовольняє наведеним вимогам.

Якщо за даними попередньої таблиці заповнити таблицю відносних частот, то побудовану на її основі ступінчасту фігуру називають *гістограмою відносних частот* (рис. 155).

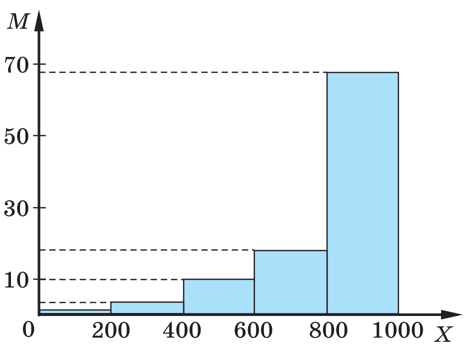


Рис. 154

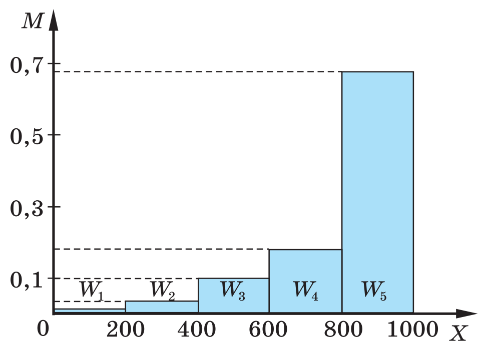


Рис. 155

X	[0; 200)	[200; 400)	[400; 600)	[600; 800)	[800; 1000]
W	0,01	0,03	0,1	0,18	0,68

$\Sigma W = 1$

Гістограму відносних частот будують звичайно таким чином, щоб площа кожного стовпця під сходинкою дорівнювала відповідному значенню W. Це робиться аналогічно до побудови гістограми частот. Якщо основою кожного стовпця служить проміжок значень випадкової величини довжиною h, то висоту стовпця беруть рівною $\frac{W}{h}$ (це відношення називається *щільністю відносної частоти* на розглянутому проміжку), де W — відносна частота значень величини X на відповідному проміжку. Тоді площа такого стовпця буде дорівнювати $\frac{W}{h} \cdot h = W$, а площа фігури під гістограмою дорівнює одиниці ($\Sigma W = 1$).

З а у в а ж е н н я. Якщо домовитися, що одиниця на горизонтальній осі відповідає величині h (у нашому прикладі $h = 200$ год), а одиниця на вертикальній осі — відносній частоті, що дорівнює 1, то побудована на рисунку 157 гістограма задовольняє наведеним вимогам.

Якщо не дотримуватися домовленостей, наведених у зауваженнях, то для побудови гістограми потрібно знайти щільність відповідної частоти на кожному з розглянутих проміжків. Після цього на вертикальній осі відкладають вже не значення частоти чи відносної частоти, а одержані значення щільності (зауважимо, що довжини проміжків розбиття ми вибираємо однакові, тому всі одержані значення щільності будуть пропорційні значенням відповідних частот на цьому проміжку).

Підкреслимо також різницю між гістограмою і стовбчастою діаграмою. У стовбчастої діаграми основи прямокутників вибираються довільно, а в гістограмі основи прямокутників — це довжини h вибраних інтервалів. Зовнішньою ознакою відмінності стовбчастої діаграми від гістограми є також те, що стовбчаста діаграма складається з окремих стовпців, а гістограма — із з'єднаних між собою прямокутників.

Слід зазначити, що багато дискретних випадкових величин, якими ми користуємося і які пов'язані з часом, з ростом живих організмів (людей, рослин і т. д.), є середніми значеннями проміжків значень неперервних випадкових величин.

Наприклад, розмір одягу є не що інше, як середнє значення половин обхватів грудних кліток (V см) (величина V — неперервна), що попадають у визначені інтервали (рис. 156).

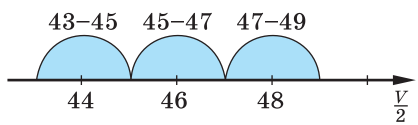


Рис. 156

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називають полігоном частот дискретної випадкової величини. Наведіть приклади побудови полігону частот і полігону відносних частот.
2. Поясніть, що називають гістограмою частот неперервної випадкової величини. Наведіть приклади побудови гістограми частот і гістограми відносних частот.

Вправи

1°. На основі даних таблиці подайте у вигляді стовбчастої і кругової діаграм розподіл значень випадкової величини X.

1)

X	1	2	3	4
W	0,1	0,3	0,4	0,2

2)

X	1	2	3	4	5
W	0,3	0,3	0,2	0,1	0,1

2. Побудуйте полігон частот і полігон відносних частот значень випадкової величини X, розподіл якої подано в таблиці:

1)

X	1	3	5	7	9
M	3	0	5	7	5

2)

X	11	12	13	14	15	16
M	6	5	2	3	1	3

3°. На рисунку 157 побудовано полігони, що ілюструють розподіл частоти продажу магазином протягом тижня комп'ютерів (чорна лінія) і телевізорів (синя лінія). Укажіть два дні, які безпосередньо слідують один за другим, коли:

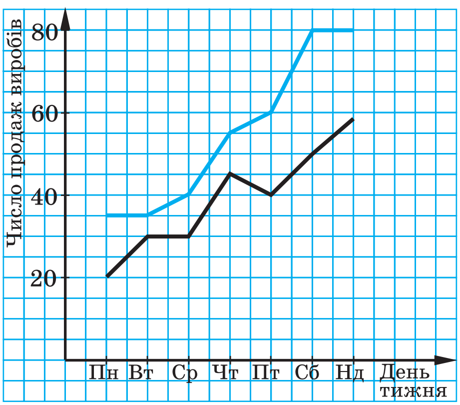


Рис. 157

1) число проданих телевізорів виросло більше, ніж число проданих комп'ютерів;
2) число проданих телевізорів збільшилося, а число проданих комп'ютерів зменшилося;
3) число проданих комп'ютерів виросло, а число проданих телевізорів залишилося тим самим.

4. Виміряли зріст 50 старшокласників і результати записали в таблицю:

149	150	150	151	151	152	152	153	154	154
155	155	155	156	156	157	157	157	158	158
159	159	159	159	161	161	161	162	162	162
162	162	165	166	166	166	167	167	169	170
171	171	173	173	173	175	176	178	180	182

Згрупувавши ці дані за класами 145–149, 150–154, 155–159, 160–164, 165–169, 170–174, 175–179, 180–184, подайте частотний розподіл зросту учнів за цими класами за допомогою:

1) таблиці; 2) полігону частот; 3) стовбчастої діаграми; 4) гістограми.

5°. На гістограмі (рис. 158) наведено дані про розподіл віку робітників цеху за групами. Користуючись гістограмою, знайдіть:

1) число робітників цеху віком від 18 до 23 років;

2) вікову групу, яку складає найбільша кількість робітників;

3) загальну кількість робітників цеху.

6. Спостерігаючи за роботою бригади токарів, встановили час, що витрачають токарі на обробку однієї деталі. Аналізуючи одержані дані, склали таблицю:

X — час (у хв)	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20
M — кількість токарів	2	6	11	7	5

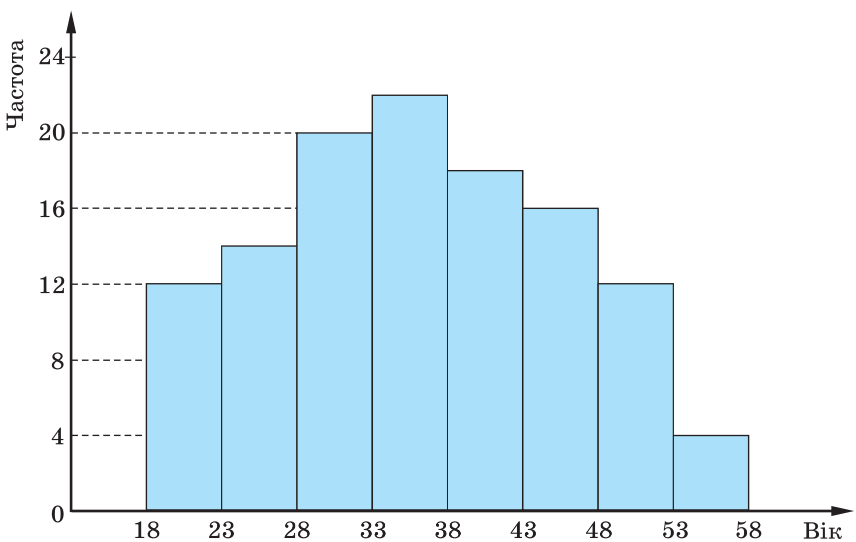


Рис. 158

Користуючись таблицею, побудуйте:

1) гістограму частот значень випадкової величини X — часу виготовлення однієї деталі;
2) перетворіть гістограму в полігон, замінюючи кожен інтервал числом, що є його серединою (тобто як абсциса відповідної точки полігону вибирається середня точка з розглянутого інтервалу);
3) гістограму відносних частот значень випадкової величини X;
4) перетворіть гістограму в полігон, замінюючи кожен інтервал числом, що є його серединою.

§20 ВСТУП ДО СТАТИСТИКИ

20.1. Поняття про статистику. Генеральна сукупність і вибірка

1. Поняття про статистику. «Статистика знає все», — стверджували І. Ільф і Є. Петров у своєму знаменитому романі «Дванадцять стільців» і продовжували: «Відомо, скільки якої їжі з'їдає за рік середній громадянин республіки… Відомо, скільки в країні мисливців, балерин… верстатів, велосипедів, пам'ятників, дівчат, маяків і швейних машинок. Як багато життя, повного запалу, пристрастей і думки, дивиться на нас із статистичних таблиць!»

Цей іронічний опис дає досить точне уявлення про *статистику* (від латинського *status* — стан) — *науку, що вивчає, обробляє і аналізує кількісні дані про найрізноманітніші масові явища в житті*. Економічна статистика вивчає зміну цін, попиту та пропозиції на товари, прогнозує зростання і падіння виробництва і споживання. Медична статистика вивчає ефективність різних ліків і методів лікування, імовірність виникнення деякого захворювання в залежності від віку, статі, спадковості, умов життя, шкідливих звичок, прогнозує поширення епідемій. Демографічна статистика вивчає народжуваність, чисельність населення, його склад (віковий, національний, професійний). А є ще статистика фінансова, податкова, біологічна, метеорологічна…

Статистика має багатовікову історію. Уже в стародавньому світі вели статистичний облік населення. Однак довільні тлумачення статистичних даних, відсутність строгої наукової бази статистичних прогнозів навіть у середині XIX ст. ще не дозволяли говорити про статистику як науку. Тільки в XX ст. сформувалася математична статистика* — наука, яка спирається на закони теорії імовірностей. Виявилося, що статистичні методи обробки даних із самих різних областей життя мають багато спільного. Це дозволило створити універсальні науково обґрунтовані методи статистичних досліджень і перевірки статистичних гіпотез. Тобто

* Про історію розвитку математичної статистики див. на с. 373.

математична статистика — це розділ математики, який вивчає математичні методи обробки і використання статистичних даних для наукових і практичних висновків.

У математичній статистиці розглядаються методи, які дають можливість за результатами експериментів (статистичними даними) робити певні висновки імовірнісного характеру.

Серед основних задач математичної статистики можна відзначити такі.

1. **Оцінка імовірності.** Нехай деяка випадкова подія має імовірність $p > 0$, але її значення нам невідоме. Вимагається оцінити цю імовірність за результатами експериментів, тобто маємо задачу про оцінку імовірності через частоту.
2. **Оцінка закону розподілу.** Досліджується деяка випадкова величина, точний вираз для закону розподілу якої нам невідомий. Потрібно за результатами експериментів знайти наближений вираз для функції, що задає закон розподілу.
3. **Оцінка числових характеристик випадкової величини** (математичного сподівання, дисперсії — див. п. 20.2 і 20.3).
4. **Перевірка статистичних гіпотез** (припущень). Досліджується деяка випадкова величина. Виходячи з певних міркувань, висувається, наприклад, гіпотеза, що розподіл цієї випадкової величини близький до нормального (див. п. 20.4). Потрібно за результатами експериментів прийняти або відхилити цю гіпотезу.

Результати досліджень, що проводяться методами математичної статистики, застосовуються для прийняття рішень. Зокрема, при плануванні і організації виробництва, при контролі якості продукції, при виборі оптимального часу наладки чи заміни діючої апаратури (наприклад, визначення часу заміни двигуна літака, окремих частин станків і т. д.).

Як і в кожній науці, у статистиці використовуються свої специфічні терміни і поняття. Деякі з них наведено в таблиці 33 на с. 318. Запам'ятовувати їх означення не обов'язково, досить розуміти їх зміст.

2. Генеральна сукупність і вибірка. Для вивчення різних масових явищ проводяться спеціальні статистичні дослідження. Будь-яке статистичне дослідження починається з цілеспрямованого збору інформації про явище чи процес, що вивчається. Цей етап називають *етапом статистичних спостережень*. Для отримання статистичних даних у результаті спостережень схожі елементи деякої сукупності порівнюють за різними ознаками. Як ми вже бачили в задачах попереднього параграфу, учнів 11 класів можна порівнювати, наприклад, за зростом, розміром одягу, успішністю і т. д. Болти можна порівнювати за довжиною, діаметром, вагою, матеріалом і т. д. Практично будь-яка ознака або піддається безпосередньому вимірюванню, або може одержати умовну числову характеристику (див. приклад із випа-

Таблиця 33

Часто вживаний термін	Зміст терміну	Науковий термін	Означення
Загальний ряд даних	Те, звідки вибирають	**Генеральна сукупність**	*Множина всіх можливих результатів спостереження (вимірювання)*
Вибірка	Те, що вибирають	**Статистична вибірка, статистичний ряд**	*Множина результатів, які реально одержані в даному спостереженні (вимірюванні)*
Варіанта	Значення одного з результатів спостереження (вимірювання)	**Варіанта**	*Одне із значень елементів вибірки*
Ряд даних	Значення всіх результатів спостереження (вимірювання), перелічені по порядку	**Варіаційний ряд**	*Впорядкована множина всіх варіант*

данням «герба» або «числа» на с. 304). Таким чином, деяку ознаку елементів сукупності можна розглядати як випадкову величину, що набуває тих чи інших числових значень.

При вивченні реальних явищ часто буває неможливо обстежувати всі елементи сукупності. Наприклад, практично неможливо виявити розміри взуття у всіх людей планети. А перевірити, наприклад, наявність аркушів неякісного фотопаперу у великій партії хоча і реально, але безглуздо, тому що повна перевірка призведе до знищення всієї партії паперу. У подібних випадках замість вивчення всіх елементів сукупності, що називають *генеральною сукупністю,* обстежують її значну частину, обрану випадковим чином. Цю частину називають *вибіркою*.

Якщо у вибірці присутні всі значення випадкової величини в тих самих пропорціях, що й у генеральній сукупності, то цю вибірку називають *репрезентативною* (від французького *représentatif* — представницький).

Наприклад, якщо менеджер швейної фабрики великого міста хоче з'ясувати, у якій кількості потрібно шити одяг тих чи інших розмірів, він повинен скласти репрезентативну вибірку людей цього міста. *Обсяг* її може бути і не дуже великим (наприклад, 1000 чоловік), але в таку вибірку не можна, наприклад, брати тільки дітей дитячого садка чи тільки робітників одного заводу. Очевидно, мікромоделлю міста може служити сукупність мешканців багатоквартирного будинку (чи декількох будинків), у якому приблизно в тих самих пропорціях, що й у самому місті, проживають люди різного віку і різних комплекцій.

Нехай S — обсяг генеральної сукупності, n — обсяг репрезентативної вибірки, у якій k значень досліджуваних ознак розподілено по частотах M_1, M_2, ..., M_k, де $\Sigma M = n$. Тоді в генеральній сукупності частотам M_1, M_2, ..., M_k будуть відповідати частоти s_1, s_2, ..., s_k тих самих значень ознаки, що й у вибірці ($\Sigma s = S$). За означенням репрезентативної вибірки одержуємо:

$$\frac{M_i}{n} = W_i = \frac{s_i}{S}$$

де i — порядковий номер значення ознаки ($1 \leqslant i \leqslant k$). Із цього співвідношення знаходимо

$$s_i = SW_i \left(\text{або } s_i = S\frac{M_i}{n}\right), \text{ де } 1 \leqslant i \leqslant k. \qquad (1)$$

Приклад Взуттєвий цех повинен випустити 1000 пар кросівок молодіжного фасону. Для визначення того, скільки кросівок і якого розміру потрібно випустити, були виявлені розміри взуття у 50 випадковим чином вибраних підлітків. Розподіл виявлених розмірів за частотами подано в таблиці:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1

$\Sigma M = n = 50$

Скільки кросівок різного розміру буде виготовляти фабрика?

Розв'язання

Будемо вважати розглянуту вибірку об'ємом $n = 50$ підлітків репрезентативною. Тоді в генеральній сукупності (об'ємом $S = 1000$) кількість кросівок кожного розміру пропорційна кількості кросівок відповідного розміру у вибірці (і для кожного розміру знаходиться за формулою (1)). Результати розрахунків будемо записувати в таблицю:

Розмір (X)	36	37	38	39	40	41	42	43	44	
Частота (M)	2	5	6	12	11	7	4	2	1	$\Sigma M = n = 50$
Відносна частота (W)	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{7}{50}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{50}$	$\Sigma W = 1$
Кількість кросівок (SW)	40	100	120	240	220	140	80	40	20	$\Sigma(SW) = S = 1000$

Відповідь.

Розмір	36	37	38	39	40	41	42	43	44
Кількість кросівок	40	100	120	240	220	140	80	40	20

◁

У промисловості і сільському господарстві для визначення кількісного співвідношення виробів різного сорту користуються так званим *вибірковим методом*. Суть цього методу буде ясна з опису наступного досліду, теоретичну основу якого складає закон великих чисел.

У коробці ретельно перемішаний горох двох сортів: зелений і жовтий. Невеликою ємністю, наприклад ложкою, витягають з різних місць коробки невеликі порції гороху. У кожній порції підраховують число M жовтих горошин і число n усіх горошин. Для кожної порції знаходять відносну частоту появи жовтої горошини $W = \frac{M}{n}$. Так роблять k разів (на практиці звичайно беруть $5 < k < 10$) і щораз обчислюють відносну частоту. За статистичну імовірність вилучення жовтої горошини з коробки приймають середнє арифметичне отриманих відносних частот W_1, W_2, …, W_k:

$$W_{\text{сер}} = \frac{W_1 + W_2 + \ldots + W_k}{k}.$$

Запитання для контролю

1. Поясніть, які завдання розв'язують статистика і математична статистика.
2. Поясніть, як ви розумієте терміни: генеральна сукупність, вибірка, репрезентативна вибірка. Наведіть приклади.

Вправи

1. Визначіть, яку з запропонованих вибірок в останньому стовпчику таблиці можна вважати репрезентативною.

№	Генеральна сукупність	Мета обстеження	Вибірка
1	2	3	4
1°	Партія однакових деталей об'ємом 10 000 штук	Визначення числа бракованих деталей у партії	1) 5 деталей, які лежать поряд; 2) 5 деталей, вибраних випадковим чином із різних частин партії; 3) 100 деталей, вибраних випадковим чином із різних частин партії

1	2	3	4
2°	Усі бродячі собаки міста — обласного центру	Визначення числа собак, які хворіють на чумку	1) Одна собача зграя; 2) по декілька випадковим чином відловлених собак з кожного району міста
3°	Усі екзаменаційні роботи зовнішнього тестування з математики випускників шкіл міста	Виявлення співвідношення між числом учнів, які знаходяться на достатньому, середньому і високому рівнях навчальних досягнень з математики	1) 5 робіт, взятих випадковим чином із числа всіх робіт; 2) 50 робіт, взятих випадковим чином із числа всіх робіт; 3) 5 робіт випускників однієї школи
4°	Партія штампованих деталей об'ємом 100 000 штук	Визначення середньої маси деталі в партії	1) 2 деталі; 2) 100 деталей, які виготовили останніми; 3) 50 випадковим чином вибраних деталей із партії
5	Бідон молока	Визначення жирності молока (у відсотках)	1) Ложка молока, яка взята з поверхні через 2 год після надою; 2) стакан молока, налитий з бідону після 2 год охолодження його в погребі; 3) ложка молока, взята після ретельного перемішування молока
6	Урожай зерна на площі 1000 га	Визначення урожайності зерна на цьому полі	1) Урожай зерна з північного схилу пагорба площею 1 га; 2) середнє арифметичне урожайності зерна з двох сусідніх ділянок площею 1 га — північного і східного схилів пагорба; 3) середнє арифметичне урожайностей зерна з 10 ділянок, кожна з яких площею 10 соток і вибрана на полі випадковим чином

2. В уривку з художнього твору деякого автора об'ємом 600 слів дієслова зустрічаються 72 рази. Визначте орієнтовну кількість дієслів в уривку об'ємом 2000 слів цього самого автора.

3. Серед випадковим чином вибраних 100 молодих людей, які влітку носять кепки, провели опитування про кольорові переваги для цього виду головних уборів. Результати опитування відображено в таблиці:

Колір	Чорний	Червоний	Синій	Сірий	Білий	Жовтий	Зелений
Частота	32	20	16	14	11	5	2

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації швейній фабриці по кількості випуску кепок кожного кольору, якщо фабрика повинна випустити 30 000 кепок.

4. Молокозавод випускає молоко різної жирності. У продуктових магазинах міста, для якого завод виробляє молоко, у навмання вибраних 50 покупців молока було проведено опитування про те, якої жирності молоко вони споживають. Результати опитування відображено в таблиці:

Жирність молока (у %)	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Частота	10	6	4	5	12	7	6

Вважаючи розглянуту вибірку репрезентативною, запропонуйте рекомендації молокозаводу по об'єму випуску молока кожного виду, якщо молокозавод повинен випускати 2000 літрів молока щоденно.

20. 2. Статистичні характеристики рядів даних. Математичне сподівання випадкової величини

Таблиця 34

Означення	Приклад
Ранжирування ряду даних	
Під *ранжируванням ряду даних* розуміють розташування елементів цього ряду в порядку зростання (мається на увазі, що кожне наступне число або більше, або не менше попереднього).	Якщо ряд даних вибірки має вигляд 5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4, то після ранжирування він перетворюється на ряд 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. (*)

Продовж. табл. 34

<table>
<tr><td colspan="2">Розмах вибірки (R)</td></tr>
<tr><td>Розмах вибірки — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці.</td><td>Для ряду (*) розмах вибірки:
$R = 9 - 3 = 6$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Мода (Mo)</td></tr>
<tr><td>Мода — це те значення випадкової величини, яке зустрічається найчастіше.</td><td>У ряду (*) значення 4 зустрічається найчастіше, отже, $Mo = 4$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Медіана (Me)</td></tr>
<tr><td>Медіана — це так зване серединне значення упорядкованого ряду значень випадкової величини:
— якщо кількість чисел у ряду непарна, то медіана — це число, записане посередині;
— якщо кількість чисел у ряду парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.</td><td>Для ряду (*), у якому 9 членів, медіана — це середнє (тобто п’яте) число 5:
$Me = 5.$
Якщо розглянути ряд
3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9,
у якому 10 членів, то медіана — це середнє арифметичне п’ятого і шостого членів:
$Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5.$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Середнє значення ($\overline{X}$) випадкової величини X</td></tr>
<tr><td>Середнім значенням випадкової величини X називається середнє арифметичне всіх її значень.
Якщо випадкова величина X набуває n значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то
$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (**)$$
Якщо випадкова величина X набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$ відповідно з частотами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (тоді $\Sigma M = n$), то середнє арифметичне можна обчислювати за формулою
$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}.$$</td><td>Нехай випадкова величина X задана таблицею розподілу за частотами M:
<table><tr><td>X</td><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>M</td><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr></table>$\Sigma M = n = 8.$
Тоді за формулою (**)
$$\overline{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$$
або за другою формулою
$$\overline{X} = \frac{2\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 34

Математичне сподівання **(MX)** випадкової величини X

Нехай випадкова величина X набуває значень $x_1, x_2, \ldots, x_k$ відповідно з імовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_k$, тобто має закон розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_2	p_2	...	p_k

Сума добутків всіх значень випадкової величини на відповідні імовірності називається *математичним сподіванням величини X*:

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k.$$

Нехай закон розподілу випадкової величини X задано таблицею:

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

Тоді $MX = 2 \cdot 0{,}3 + 5 \cdot 0{,}1 + 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}4 = 5{,}1.$

Математичне сподівання показує, на яке середнє значення випадкової величини X можна сподіватися в результаті експерименту (при значній кількості повторень експерименту).

Пояснення й обґрунтування

1. Розмах, мода і медіана ряду даних. Іноді вибірку випадкових величин чи всю генеральну сукупність цих величин доводиться характеризувати одним числом. На практиці це необхідно, наприклад, для швидкого порівняння двох або більше сукупностей за загальною ознакою.

Розглянемо конкретний приклад.

Нехай після літніх канікул провели опитування 10 дівчат і 9 хлопців одного і того самого класу відносно кількості книг, які вони прочитали за канікули. Результати були записані в порядку опитування. Одержали наступні ряди чисел.

Для дівчат: 4, 3, 5, 3, 8, 3, 12, 4, 5, 5.

Для хлопців: 5, 3, 3, 4, 6, 4, 4, 7, 4.

Щоб зручніше було аналізувати інформацію, у подібних випадках числові дані *ранжирують*, розташовуючи їх у порядку зростання (коли кожне наступне число або більше, або не менше попереднього). У результаті ранжирування одержимо такі ряди.

Для дівчат:

$$3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 8, 12. \tag{1}$$

Для хлопців:

$$3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 6, 7. \tag{2}$$

Тоді розподіл за частотами M випадкових величин: X — число книг, прочитаних за канікули дівчатами, і Y — число книг, прочитаних за канікули хлопцями, можна задати таблицями:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\Sigma M = n = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\Sigma M = n = 9$

Також ці розподіли можна проілюструвати графічно за допомогою полігону частот (рис. 161, *а*, *б*).

Для порівняння рядів (1) і (2) (тобто рядів значень випадкових величин X і Y) використовують різні характеристики. Наведемо деякі з них.

Розмахом ряду чисел (позначається R) називають різницю між найбільшим і найменшим із цих чисел. Оскільки ми аналізуємо вибірку випадкових величин, то

***розмах вибірки* — це різниця між найбільшим і найменшим значеннями випадкової величини у вибірці.**

Для ряду (1) розмах $R = 12 - 3 = 9$, а для ряду (2) розмах $R = 7 - 3 = 4$. На графіку розмах — це довжина області визначення полігону частот (рис. 161).

Важливою статистичною характеристикою ряду даних є його *мода* (позначається Mo, від латинського слова *modus* — міра, правило).

***Мода* — це те значення випадкової величини, яке зустрічається найчастіше.**

Так, у ряді (1) дві моди — числа 3 і 5: $Mo_1 = 3$, $Mo_2 = 5$, а в ряді (2) одна мода — число 4: $Mo = 4$. На графіку мода — це значення абсциси точки, у якій досягається максимум полігону частот (рис. 159). Зазначимо, що моди може і не бути, якщо всі значення випадкової величини зустрічаються однаково часто.

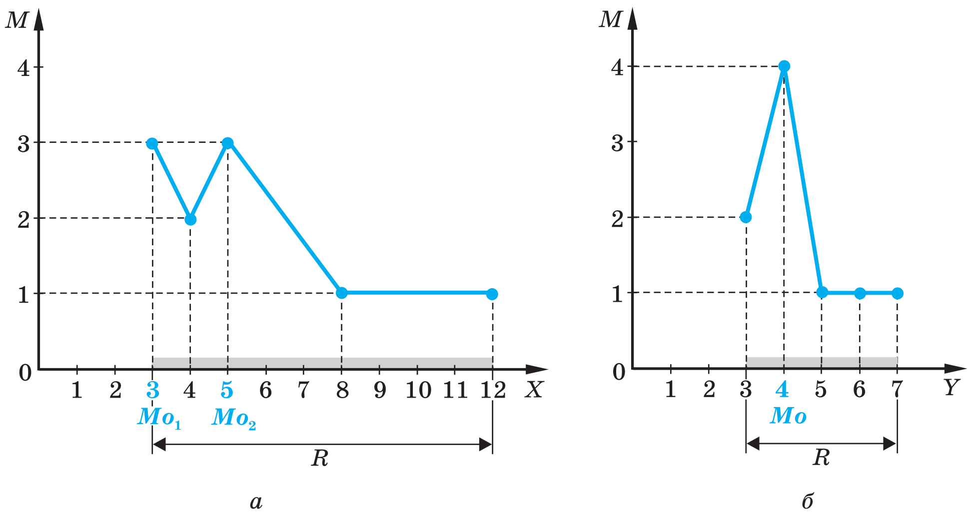


Рис. 159

Моду ряду даних звичайно знаходять тоді, коли хочуть з'ясувати деякий типовий показник. Наприклад, коли вивчаються дані про моделі чоловічих сорочок, які були продані в певний день в універмазі, то зручно використати такий показник, як мода, який характеризує модель, що користується найбільшим попитом (власне, цим і пояснюється назва «мода»).

Ще однією важливою статистичною характеристикою ряду даних є його медіана.

Медіана — це так зване серединне значення упорядкованого ряду значень випадкової величини (позначається Me).

Медіана поділяє впорядкований ряд даних на дві рівні за кількістю елементів частини.

Якщо кількість чисел в ряду непарна, то медіана — це число, записане посередині.

Наприклад, у ряду (2) непарна кількість елементів ($n = 9$). Тоді його медіаною є число, яке стоїть посередині, тобто на п'ятому місці: $Me = 4$.

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \underbrace{4}_{\text{медіана}},\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$$

Отже, про хлопців можна сказати, що одна половина з них прочитала не більше 4 книг, а друга половина — не менше 4 книг.

(Відзначимо, що у випадку непарного n номер середнього члена ряду дорівнює $\frac{n+1}{2}$.)

Якщо кількість чисел у ряду парна, то медіана — це середнє арифметичне двох чисел, що стоять посередині.

Наприклад, у ряду (1) парна кількість елементів ($n = 10$). Тоді його медіаною є число, яке дорівнює середньому арифметичному чисел, які стоять посередині, тобто на п'ятому і на шостому місцях: $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$.

$$3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ \uparrow\ 5,\ 5,\ 5,\ 8,\ 12$$

4,5 — медіана

Отже, про дівчат можна сказати, що одна половина з них прочитала менше 4,5 книг, а друга половина — більше 4,5 книг.

(Відзначимо, що у випадку парного n номери середніх членів ряду дорівнюють $\frac{n}{2}$ і $\frac{n}{2}+1$.)

2. Середнє значення випадкової величини та її математичне сподівання.

Середнім значенням випадкової величини X (позначається $\overline{X}$) **називається середнє арифметичне всіх її значень.**

Якщо випадкова величина X набуває n значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Якщо випадкова величина X набуває значень x_1, x_2, ..., x_k відповідно з частотами m_1, m_2, ..., m_k (тоді $\Sigma M = n$), то, замінюючи однакові доданки в чисельнику на відповідні добутки, одержуємо, що середнє арифметичне можна обчислювати за формулою

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n}. \tag{3}$$

Останню формулу зручно використовувати в тих випадках, коли розподіл випадкової величини за частотами задано у вигляді таблиці. Нагадаємо, що розподіл за частотами M випадкових величин: X — число книг, прочитаних за канікули дівчатами, і Y — число книг, прочитаних за канікули хлопцями, було задано такими таблицями:

X	3	4	5	8	12
M	3	2	3	1	1

$\Sigma M = n = 10$

Y	3	4	5	6	7
M	2	4	1	1	1

$\Sigma M = n = 9$

Тоді середні значення заданих випадкових величин дорівнюють:

$$\overline{X} = \frac{3\cdot 3 + 4\cdot 2 + 5\cdot 3 + 8\cdot 1 + 12\cdot 1}{10} = \frac{52}{10} = 5{,}2, \qquad \overline{Y} = \frac{3\cdot 2 + 4\cdot 4 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 + 7\cdot 1}{9} = \frac{40}{9} \approx 4{,}4.$$

Оскільки $\overline{X} > \overline{Y}$, то можна сказати, що за один і той самий проміжок часу дівчата в класі читають книг більше, ніж хлопці.

Якщо в правій частині формули (3) почленно поділити кожен доданок в чисельнику на знаменник, то одержимо формулу

$$\overline{X} = x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n}. \tag{4}$$

Нагадаємо, що відношення $\frac{m_i}{n}$ (де $1 \leqslant i \leqslant k$) є відносною частотою випадкової події — випадкова величина X набула значення x_i (ми позначали цю подію так: $X = x_i$). Якщо вважати проведені випадкові експерименти статистично стійкими, то при значній кількості експериментів значення відносних частот близькі до відповідних імовірностей. Позначимо імовірність події — випадкова величина X набула значення x_1, тобто $P(X = x_1)$, через p_1; $P(X = x_2)$ — через p_2; ...; $P(X = x_k)$ — через p_k. Тоді права частина рівності (4) набуде вигляду:

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k.$$

Одержаний вираз називається *математичним сподіванням* випадкової величини X і позначається MX (або $M(X)$). Сформулюємо відповідне означення для дискретної випадкової величини.

Нехай випадкова величина X набуває значення x_1, x_2, ..., x_k відповідно з імовірностями p_1, p_2, ..., p_k, тобто має закон розподілу:

X	x_1	x_2	...	x_k
P	p_1	p_2	...	p_k

Сума добутків всіх значень випадкової величини на відповідні імовірності називається *математичним сподіванням величини X*:

$$MX = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k. \qquad (5)$$

Математичне сподівання показує, на яке середнє значення випадкової величини X можна сподіватися в результаті експерименту (при значній кількості повторень експерименту). За допомогою математичного сподівання можна порівнювати випадкові величини, які задані законами розподілу.

Наприклад, нехай кількості очок, що вибиваються при одному пострілі кожним з двох вправних стрільців, мають такі закони розподілу:

X	8	9	10
P	0,4	0,1	0,5

Y	8	9	10
P	0,1	0,6	0,3

Щоб з'ясувати, який із стрільців стріляє краще, знаходять математичне сподівання для кожної випадкової величини:

$MX = 8 \cdot 0{,}4 + 9 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}5 = 9{,}1$; $\quad MY = 8 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 10 \cdot 0{,}3 = 9{,}2$.

Отже, середня кількість очок, які вибиває другий стрілець при одному пострілі, дещо вища, ніж у першого. Це дає підставу зробити висновок про те, що другий стрілець стріляє трохи краще, ніж перший.

Враховуючи, що згідно з законом великих чисел, при значній кількості експериментів значення відносних частот близькі до відповідних імовірностей, можна зробити висновок, що вираз $x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + \ldots + x_k\frac{m_k}{n}$ буде наближатися до виразу $x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_kp_k$. Але за формулою (4) перший з цих виразів є середнім (тобто середнім арифметичним) значенням випадкової величини X, а другий (за формулою 5) — математичним сподіванням цієї величини. Таким чином,

при значній кількості експериментів середнє арифметичне всіх значень випадкової величини наближається до її математичного сподівання.

Зауважимо, що в посібниках із статистики моду, медіану і середнє значення об'єднують одним терміном — *міри центральної тенденції*, підкреслюючи тим самим можливість охарактеризувати ряд вибірки одним числом, до якого прямують всі її значення.

Не для кожного ряду даних має сенс формально знаходити центральні тенденції. Наприклад, якщо досліджується ряд

$$5,\ 5,\ 8,\ 110 \qquad (5)$$

річних прибутків чотирьох людей (у тис. грн.), то очевидно, що ні мода (5), ні медіана (6,5), ні середнє значення (32) не можуть виступати в ролі єдиної характеристики всіх значень ряду даних. Це пояснюється тим, що розмах ряду (105) є сумірний із найбільшим із його значень.

У даному випадку можна було шукати центральні тенденції, наприклад, для частини ряду (5):

$$5,\ 5,\ 8,$$

умовно назвавши його вибіркою річного прибутку низькооплачуваної частини населення.

Якщо у вибірці середнє значення суттєво відрізняється від моди, то його недоречно вибирати як типового представника розглянутої сукупності даних (чим більше значення моди відрізняється від середнього значення, тим «більш несиметричним» є полігон частот сукупності).

Запитання для контролю

1. На прикладі ряду даних 2, 2, 3, 5, 5, 5, 13 поясніть, що таке розмах, мода, медіана і середнє значення цього ряду і дайте відповідні означення.
2. Дайте означення математичного сподівання випадкової величини X.

Вправи

1. Знайдіть розмах, моду, медіану і середнє значення ряду даних деякої випадкової величини X:

1) 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5; 2) −3, −2, −2, −1, 0, 2, 2, 2, 3, 5.

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду і медіану заданого ряду даних.

2. Знайдіть розмах, моду, медіану і середнє значення сукупності значень випадкової величини X:

1)

X	2	3	4	5
M	3	4	1	3

2)

X	−1	3	4	5	7
M	2	3	4	4	1

Побудуйте полігон частот значень величини X. Укажіть на рисунку розмах, моду і медіану заданої сукупності даних.

3. Дівчата одинадцятого класу на уроці фізкультури при стрибках в висоту показали такі результати (у см):

90, 125, 125, 130, 130, 135, 135, 135, 140, 140, 140.

Знайдіть моду, медіану і середнє значення цієї сукупності даних. Яке з цих значень найкраще характеризує спортивну підготовку дівчат класу?

4. Нехай закон розподілу випадкової величини X задано таблицею:

1)

X	2	5	6	7
P	0,3	0,1	0,2	0,4

2)

X	4	5	8	10	12
P	0,4	0,1	0,05	0,95	0,4

Знайдіть математичне сподівання цієї величини.

5. Виграші (у гривнях), які припадають на один білет у кожній з двох лотерей, мають такі закони розподілу:

X	0	1	5	10
P	0,9	0,06	0,03	0,01

Y	0	1	5	10
P	0,85	0,12	0,02	0,01

Якій з цих лотерей ви віддали би перевагу?

20.3. Відхилення від середнього значення, дисперсія, середнє квадратичне відхилення

Таблиця 35

<table>
<tr><th>Означення</th><th>Приклад</th></tr>
<tr><td colspan="2">Відхилення від середнього значення</td></tr>
<tr><td>Відхиленням від середнього значення називають різницю між розглядуваним значенням випадкової величини і середнім значенням всієї сукупності ряду даних (для випадкової величини X відхилення від середнього — це $X-\overline{X}$)</td><td>Нехай випадкова величина X задана таблицею розподілу за частотами M:
<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>M</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>
$\Sigma M = n = 5$. Тоді одержуємо

$$\overline{X}=\frac{2+3+3+5+7}{5}=4$$
<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>$X-\overline{X}$</td><td>−2</td><td>−1</td><td>−1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Дисперсія (D)</td></tr>
<tr><td>Дисперсією називається середнє арифметичне суми квадратів усіх відхилень від середнього заданих n значень випадкової величини

$$D=\frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+\ldots+(x_n-\overline{X})^2}{n}$$</td><td>Для розглянутої випадкової величини X
<table>
<tr><td>X</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr>
<tr><td>M</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>$X-\overline{X}$</td><td>−2</td><td>−1</td><td>1</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$(X-\overline{X})^2$</td><td>4</td><td>1</td><td>1</td><td>9</td></tr>
<tr><td>$(X-\overline{X})^2\cdot M$</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>9</td></tr>
</table>

$$D=\frac{\Sigma\left((X-\overline{X})^2\cdot M\right)}{\Sigma M}=\frac{4+2+1+9}{5}=\frac{18}{5}=3{,}6$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Середнє квадратичне відхилення (σ — «сигма»)</td></tr>
<tr><td>Середнім квадратичним відхиленням називається квадратний корінь із дисперсії

$$\sigma=\sqrt{D}$$</td><td>Для розглянутої випадкової величини X:

$$\sigma=\sqrt{D}=\sqrt{3{,}6}\approx 1{,}90$$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Відхилення від середнього значення і дисперсія. У попередньому пункті було розглянуто порівняння сукупностей значень випадкових величин за допомогою центральних тенденцій (моди, медіани, середнього значення). Але трапляються ситуації, коли таке порівняння виконати неможливо.

Наприклад, нехай на одне місце токаря претендують два робітники. Для кожного з них встановили випробувальний строк, на протязі якого вони повинні були виготовляти однакові деталі. Результати їх роботи подано в таблиці:

День тижня	Кількість деталей, виготовлених за день	
	першим робітником (X)	другим робітником (Y)
Понеділок	52	61
Вівторок	54	40
Середа	50	50
Четвер	48	55
П'ятниця	46	44

Кожний з робітників за 5 днів виготовив 250 деталей, отже, середня продуктивність праці за день в обох робітників однакова:

$$\overline{X} = \overline{Y} = \frac{250}{5} = 50 \text{ (дет./день).}$$

Моди в запропонованих сукупностей відсутні, а медіани однакові (50 і 50).

Виникає питання: «Кого з цих робітників взяти на роботу?» У даному випадку як критерій порівняння сукупностей результатів їх роботи може виступати *стабільність* продуктивності праці робітника. Її можна оцінювати за допомогою відхилень від середнього значення елементів сукупності.

Відхиленням від середнього **називають різницю між розглядуваним значенням випадкової величини і середнім значенням всієї сукупності ряду даних**

(для випадкової величини X відхилення від середнього — це $X - \overline{X}$).

Наприклад, якщо значення величини $x_1 = 52$, а значення середнього $\overline{X} = 50$, то відхилення x_1 від середнього буде дорівнювати $x_1 - \overline{X} = 52 - 50 = 2$.

Очевидно, відхилення від середнього може бути як додатним, так і від'ємним числом. Неважко показати, що *сума відхилень усіх значень сукупності від середнього значення дорівнює нулю* (див., наприклад, суму відхилень у таблиці, наведеній нижче). Тому характеристикою стабільності елементів сукупності може служити *сума квадратів відхилень від середнього.*

Знайдемо відповідні значення для кожного робітника і запишемо їх у таблицю:

День тижня	X	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	Y	$Y-\overline{Y}$	$(Y-\overline{Y})^2$
Понеділок	52	2	**4**	61	11	**121**
Віторок	54	4	**16**	40	−10	**100**
Середа	50	0	**0**	50	0	**0**
Четвер	48	−2	**4**	55	5	**25**
П'ятниця	46	−4	**16**	44	−6	**36**
Сума	250	0	**40**	250	0	**282**

Як бачимо, у другого робітника сума квадратів відхилень від середнього більша, ніж у першого робітника $\left(40=\sum(X-\overline{X})^2<\sum(Y-\overline{Y})^2=282\right)$.

На практиці це означає, що другий робітник має нестабільну продуктивність праці: у якісь дні працює не в повну силу, а у якісь надолужує упущене, що завжди позначається на якості продукції. Очевидно, що роботодавець захоче взяти на місце токаря першого робітника (у якого сума квадратів відхилень від середньої продуктивності праці менша).

Якби робітники працювали різну кількість днів і виготовили в середньому однакове число деталей, то стабільність роботи кожного з них можна було б оцінити по величині *середнього арифметичного суми квадратів відхилень*. Така величина називається *дисперсією* (від латинського слова *dispersio* — розсіювання) і позначається буквою D. Отже,

***дисперсією* називається середнє арифметичне суми квадратів усіх відхилень від середнього заданих *n* значень випадкової величини.**

Для випадкової величини X, що набуває n різних значень $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і має середнє значення $\overline{X}$, дисперсія знаходиться за формулою

$$D=\frac{(x_1-\overline{X})^2+(x_2-\overline{X})^2+\ldots+(x_n-\overline{X})^2}{n}.$$

Приклад 1 Два токарі виточували однакові деталі, причому перший працював повний робочий тиждень, а другий — 4 дні. Відомості про кількість деталей, які вони виготовляли за кожний робочий день, наведено в таблиці:

День тижня	Кількість деталей, виготовлених за день	
	першим токарем (X)	другим токарем (Y)
Понеділок	53	52
Вівторок	54	46
Середа	49	53
Четвер	48	49
П'ятниця	46	—

Порівняйте стабільність роботи токарів, використовуючи дисперсію сукупності значень відповідної випадкової величини.

Знайдемо середні значення величин X і Y:

$$\overline{X} = \frac{53 + 54 + 49 + 48 + 46}{5} = \frac{250}{5} = 50,$$

$$\overline{Y} = \frac{52 + 46 + 53 + 49}{4} = \frac{200}{4} = 50.$$

Очевидно, що $\overline{X} = \overline{Y}$.

Обчислимо суму квадратів відхилень від середніх значень величин X і Y, послідовно записуючи результати в таблицю:

День тижня	Значення випадкової величини		Відхилення від середнього		Квадрат відхилення від середнього	
	X	Y	$X - 50$	$Y - 50$	$(X - 50)^2$	$(Y - 50)^2$
Понеділок	53	52	3	2	9	4
Вівторок	54	46	4	−4	16	16
Середа	49	53	−1	3	1	9
Четвер	48	49	−2	−1	4	1
П'ятниця	46	—	−4	—	16	—
				Сума:	46	30

Знайдемо значення дисперсії:

$$D_X = \frac{46}{5} = 9,2; \qquad D_Y = \frac{30}{4} = 7,5.$$

Як бачимо, $D_X > D_Y$. Отже, другий токар працює більш стабільно, ніж перший. ◁

Зауважимо, що в тому випадку, коли значення $x_1, x_2, .., x_k$ випадкової величини X повторюються з частотами $m_1, m_2, .., m_k$ відповідно, то дисперсію випадкової величини X можна обчислити за формулою:

$$D = \frac{\left(x_1 - \overline{X}\right)^2 \cdot m_1 + \left(x_2 - \overline{X}\right)^2 \cdot m_2 + \ldots + \left(x_k - \overline{X}\right)^2 \cdot m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}, \quad (3)$$

де $$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{m_1 + m_2 + \ldots + m_k}.$$

Приклад 2 Випадкова величина X має розподіл за частотами M, який наведено в таблиці:

X	3	5	6	11
M	1	2	3	1

Знайдіть її дисперсію.

▶ Середнє значення випадкової величини X дорівнює:

$$\overline{X} = \frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 11 \cdot 1}{1 + 2 + 3 + 1} = \frac{42}{7} = 6.$$

За формулою (3) знаходимо дисперсію:

$$D = \frac{(3-6)^2 \cdot 1 + (5-6)^2 \cdot 2 + (6-6)^2 \cdot 3 + (11-6)^2 \cdot 1}{1+2+3+1} = \frac{9+2+0+25}{7} = \frac{36}{7} \approx 5{,}1.$$

Відповідь. $D \approx 5{,}1$. ◁

2. Середнє квадратичне відхилення. Нехай величина X має деяку розмірність (наприклад, сантиметри). Тоді її середнє значення X і відхилення від середнього $X - \overline{X}$ мають ту саму розмірність, що й сама величина (сантиметри). Квадрат же відхилення $\left(X - \overline{X}\right)^2$ і дисперсія D мають розмірності квадрата цієї величини (тобто квадратні сантиметри).

Для оцінки ступеня відхилення від середнього значення зручно мати справу з величиною тієї самої розмірності, що й сама величина X. З цією метою використовують значення кореня квадратного з дисперсії $\sqrt{D}$.

Корінь квадратний з дисперсії називають *середнім квадратичним відхиленням* і позначають σ (грецька буква «сигма»):

$$\sigma = \sqrt{D}.$$

Зауваження. Дисперсію і середнє квадратичне відхилення називають у статистиці *мірами розсіювання* значень випадкової величини навколо середнього значення.

Приклад 3 Розподіл за частотою величини X — числа забитих голів десятьма гравцями футбольної команди за період змагань — показано в таблиці. Знайти середнє квадратичне відхилення від середнього числа забитих голів.

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1

Результати послідовних обчислень будемо заносити до таблиці:

X	0	1	2	3
M	4	2	3	1
$X \cdot M$	0	2	6	3
$X-\overline{X}$	–1,1	–0,1	0,9	1,9
$(X-\overline{X})^2$	1,21	0,01	0,81	3,61
$(X-\overline{X})^2 \cdot M$	4,84	0,02	2,43	3,61

$$\Sigma M = 10$$

$$\overline{X} = \frac{\Sigma(X \cdot M)}{\Sigma M} = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

$$D = \frac{\Sigma\left((X-\overline{X})^2 \cdot M\right)}{\Sigma M} = \frac{4{,}84+0{,}02+2{,}43+3{,}61}{10} = \frac{10{,}9}{10} = 1{,}09 \ \text{(гол.}^2\text{)}.$$

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{1{,}09} \approx 1{,}044 \ \text{(гол.)}.$$

Відповідь. $\sigma \approx 1{,}044$ гола.

Запитання для контролю

1. Дайте означення відхилення елементів сукупності від середнього значення. Наведіть приклади.
2. Поясніть, як знайти дисперсію сукупності значень випадкової величини. Сформулюйте відповідне означення.
3. Дайте означення середнього квадратичного відхилення. Поясніть, як знайти середнє квадратичне відхилення від середнього значення елементів вибірки: 1 см, 2 см, 3 см, 3 см, 6 см.

Вправи

1. Знайдіть дисперсію вибірки:
1) 10 см, 12 см, 7 см, 11 см;
2) 16 г, 14 г, 13 г, 17 г;
3) 11 с, 14 с, 11 с, 12 с, 12 с;
4) 5 м, 13 м, 8 м, 12 м, 12 м.

2. Знайдіть дисперсію сукупності значень випадкової величини X, яка задана частотним розподілом:

1)

X	2	3	4	6
M	3	2	2	3

2)

X	–1	2	3	4	5
M	3	1	2	3	1

3. Двох футболістів, які брали участь в іграх п'яти сезонів і забили однакову кількість голів (див. таблицю), порівняйте за стабільністю результатів.

Умовний номер сезону	1	2	3	4	5
Число голів, забитих першим футболістом	18	23	19	17	23
Число голів, забитих другим футболістом	19	16	22	23	20

4. Двох футболістів, один з яких брав участь у п'яти ігрових сезонах, а другий — у шести (див. таблицю), порівняйте за результативністю і стабільністю в забиванні голів.

Умовний номер сезону	1	2	3	4	5	6
Число голів, забитих першим футболістом	—	17	20	18	21	14
Число голів, забитих другим футболістом	17	21	20	16	15	19

5. Знайдіть середнє квадратичне відхилення від середнього значення елементів вибірки:

1) 3 кг, 5 кг, 5 кг, 8 кг, 4 кг; 2) 12 м, 10 м, 7 м, 12 м, 9 м.

6. Знайдіть середнє квадратичне відхилення величини X, яка задана частотним розподілом:

1)

X	2	3	4	6
M	2	2	1	3

2)

X	−5	−2	2	3
M	2	3	4	2

7. Визначте, яка вибірка:

$$-1, 0, 2, 3, 5, 3 \text{ чи } -5, -3, 0, -3, 1$$

має менше розсіяння даних навколо свого середнього значення.

20. 4. Нормальний розподіл. Правило трьох сигм

Розглянемо декілька прикладів розподілу випадкових величин.

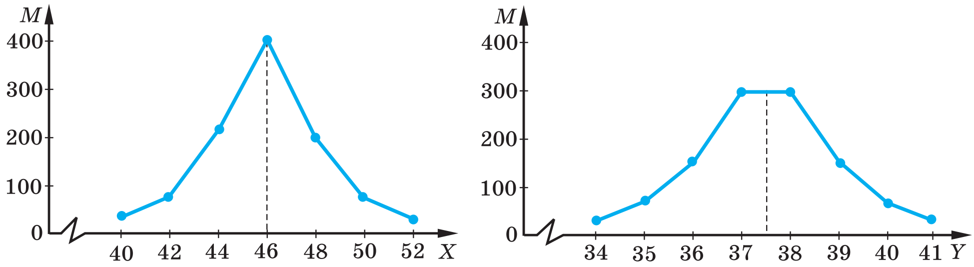
Значення розмірів одежі (X) і взуття (Y) у випадковим чином вибраних тисячі одинадцятикласниць шкіл міста і розподіл їх за частотами подано в таблицях:

X	40	42	44	46	48	50	52
M	18	79	215	375	213	81	19

X	34	35	36	37	38	39	40	41
M	6	48	139	309	305	141	46	6

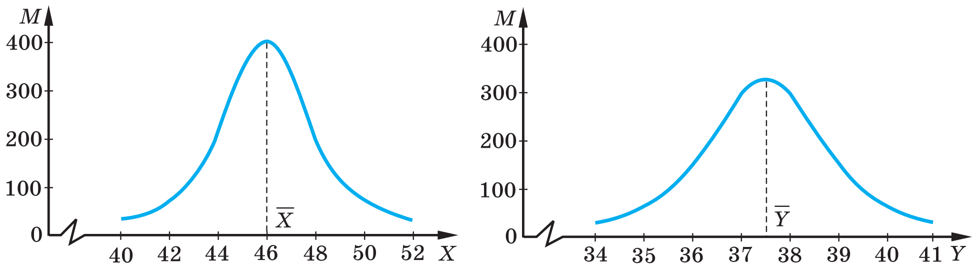
Полігони частот заданих сукупностей зображено на рисунку 162.

Виявляється, що багато ознак різних явищ природи і техніки (зріст, вага живих організмів одного виду, результати вимірювання характеристик однотипних технічних виробів, дальність польоту снаряду при стрільбі по цілі з однієї і тієї гармати та ін.) мають схожі з представленими на рисун-



а *б*

Рис. 160



а *б*

Рис. 161

ку 162 розподіли своїх числових значень за частотами. Ці розподіли називають *нормальними розподілами*.

Проведемо через точки, відмічені на рисунку 160, плавні криві (рис. 161). Ці криві називають *кривими нормального розподілу*. Відзначимо, що *криві нормального розподілу симетричні відносно вертикальних прямих, які проходять через середні значення* $\left(\overline{X}=46 \text{ і } \overline{Y}=37{,}5\right)$ *розглянутих сукупностей.*

Подібно до того, як графіки всіх парабол можна одержати за допомогою геометричних перетворень єдиної параболи $y = x^2$, так і всі криві нормальних розподілів можна одержати за допомогою геометричних перетворень однієї кривої. Цю криву називають *кривою нормального розподілу* або, на честь німецького математика Карла Гаусса, *гауссовою кривою* (рис. 162).

Ця нескінченна «колоколоподібна» крива симетрична відносно осі ординат і має єдиний максимум. Площа частини площини, обмеженої гауссовою кривою і віссю Ox, дорівнює одиниці. Її «вітки» дуже швидко наближаються до осі абсцис: якщо знайти площу

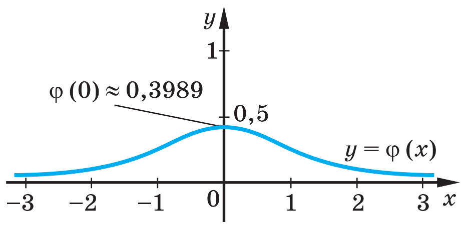


Рис. 162

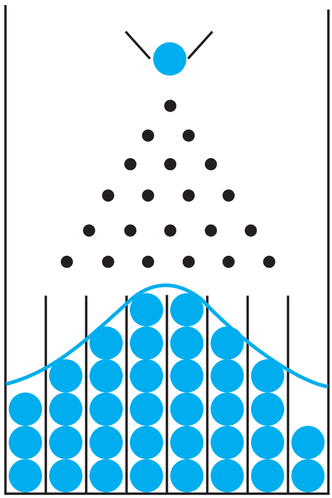


Рис. 163

криволінійної трапеції, обмеженої гауссовою кривою, віссю Ox та прямими $x = -3$ і $x = 3$, то одержуємо більше 0,99, тобто більше 99 % всієї площі. Функцію, яка задається гауссовою кривою, позначають $\varphi(x)$. Аналітично вона задається досить складною формулою:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Але для практичних обчислень ця формула не дуже потрібна. Для значень цієї функції складено детальні числові таблиці.

Прикладом реального отримання кривої нормального розподілу може служити результат досліду, який був проведений англійським ученим Ф. Гальтоном (1822–1911). Для проведення цього досліду в дошку вбиваються в «шаховому порядку» цвяхи (рис. 163). Дошка встановлюється з невеликим нахилом до горизонтальної поверхні. У верхній частині дошки робиться конусний отвір, через який пропускаються однакові кульки. Відстань між сусідніми цвяхами скрізь однакова і трохи більша за діаметр кульки.

Пройшовши через отвір, кулька відштовхується від першого верхнього цвяха і випадковим чином обгинає його або ліворуч, або праворуч. Аналогічно кулька проходить кожен із нижніх цвяхів, що зустрічається на її шляху (з імовірністю, близькою до $\frac{1}{2}$, обгинає його або ліворуч, або праворуч). Пройшовши всі ряди цвяхів, кулька попадає в один із вертикальних пеналів-нагромаджувачів.

Якщо число рядів цвяхів значно збільшити і запустити багато кульок, можна помітити, що крива, що обгинає верхній ряд кульок у пеналах, має вертикальну вісь симетрії і нагадує криву нормального розподілу.

У курсі теорії імовірностей доводиться, що

68 % (або приблизно $\frac{2}{3}$) всіх значень нормально розподіленої випадкової величини X мають відхилення від середнього значення, які за абсолютною величиною не перевищують середнього квадратичного відхилення σ, а 96 % всіх значень — не перевищують 2σ. Також доводиться, що майже всі значення (точніше, 99,7 % всіх значень) мають відхилення від середнього, які не перевищують за абсолютною величиною потроєного середнього квадратичного відхилення 3σ.

Цю закономірність часто називають *правилом трьох сигм* (рис. 164).

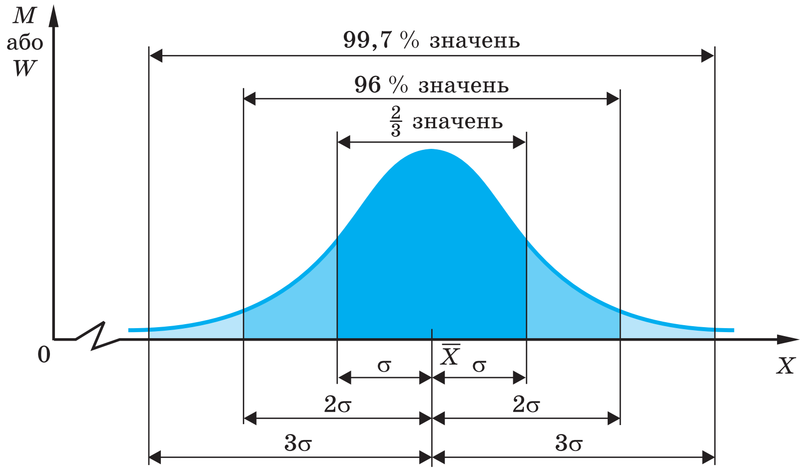


Рис. 164

Відомо, що результати вимірювань у масовому виробництві (довжина, маса конкретних видів продукції) — неперервні випадкові величини, що мають нормальний розподіл.

Наприклад, вимірювання діаметрів d партії труб (об'єм партії дорівнює n), виготовлених трубопрокатним заводом, показали, що розміри діаметрів знаходяться в проміжку від 149,7 мм до 150,3 мм. Це означає, що середнє значення їх сукупності

$$\overline{d} = \frac{149,7 + 150,3}{2} = 150 \text{ (мм).}$$

Розміри діаметрів труб розподілені нормально із середнім квадратичним відхиленням від середнього значення $\overline{d}$, що дорівнює $\sigma = \frac{150 - 149,7}{3} = 0,1$ (мм). Це проілюстровано на рисунку 165.

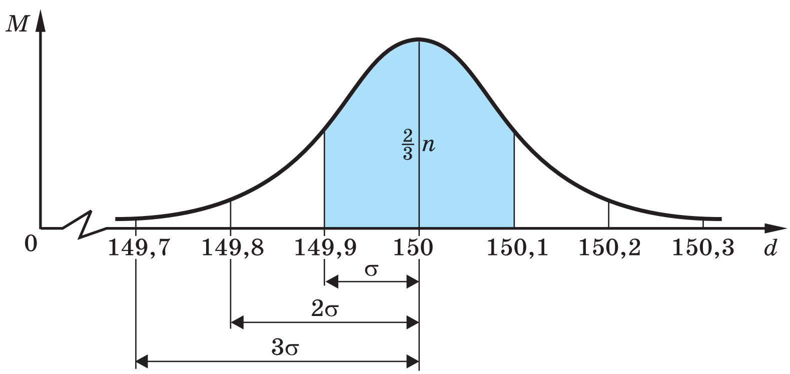


Рис. 165

З наведених міркувань можна зробити висновок, що приблизно $\frac{2}{3}$ усіх труб мають діаметри від 149,9 мм до 150,1 мм, а значна їх частина (96 %) мають діаметри від 149,8 мм до 150,2 мм.

Приклад У деяких міжнародних іграх із різних видів спорту повинні брати участь 600 спортсменів. Відомо, що розміри одежі V учасників ігор варіюються від 40-го (у гімнасток) до 62-го (у важкоатлетів). Оргкомітет ігор вирішив подарувати всім учасникам майки з емблемою цих ігор. Швейній фабриці було зроблено замовлення на пошив майок вільного покрою трьох умовних розмірів: I, II, III. Які стандартні розміри (від 40-го до 62-го) доцільно об'єднати в умовних розмірах I, II і III і скільки майок кожного з цих трьох розмірів потрібно пошити?

▶ Вважаючи, що розміри одежі V спортсменів мають нормальний розподіл, знайдемо середнє значення сукупності розмірів $\overline{V} = \frac{40+62}{2} = 51.$

Згідно з правилом трьох сигм вважаємо, що практично вся сукупність майок від 40-го до 62-го розміру попадає до інтервалу довжиною 6σ. При цьому в центральну частину розподілу (рис. 166) попадають розміри 48, 50, 52, 54, їм доцільно присвоїти умовний розмір II.

На ці розміри у всій сукупності буде припадати приблизно $\frac{2}{3}$ майок, тобто

$$600 \cdot \frac{2}{3} = 400.$$

У I умовний розмір увійдуть 40, 42, 44 і 46-й розміри; у III — 56, 58, 60 і 62-й розміри. Через симетричність кривої нормального розподілу відносно вертикальної прямої, яка проходить через середнє значення, на кожен з I і III умовних розмірів припадає $\left(1-\frac{2}{3}\right):2=\frac{1}{6}$ від усієї сукупності майок, тобто по $600 \cdot \frac{1}{6} = 100$ майок.

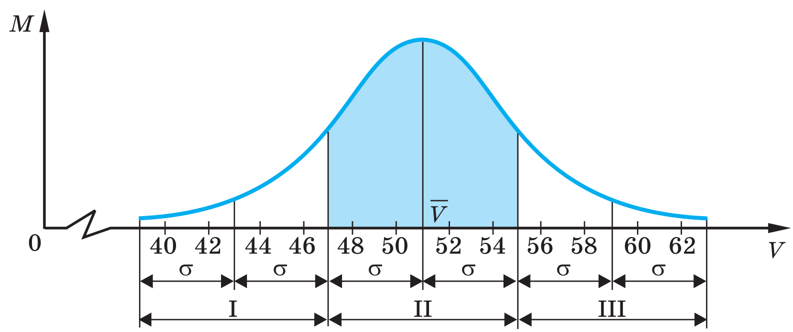


Рис. 166

Відповідь. I розмір (40–46) — 100 майок; II розмір (48–54) — 400 майок; III розмір (56–62) — 100 майок. ◁

Запитання для повторення

1. Назвіть випадкові величини, які вважаються нормально розподіленими. Зобразіть схематичний вигляд кривої нормального розподілу. Що є віссю симетрії цієї кривої?
2. Поясніть зміст правила трьох сигм для нормально розподіленої випадкової величини.

Вправи

1. Побудуйте полігон частот для розмірів взуття:
   1) 60 випадковим чином вибраних жінок (див. таблицю зліва);
   2) 60 випадковим чином вибраних чоловіків (див. таблицю справа).

Жінки					
22,5	24	23,5	23	24,5	23
23,5	24,5	22,5	23,5	25,5	25
25,5	22	24	25	23,5	21
23	24,5	23	24,5	23	24
25	24	21,5	23,5	24,5	22,5
22	23,5	26,5	23,5	25	26
24,5	23	24	24,5	22,5	24
23,5	24	23	25	24	22
25,5	21,5	24,5	26	25,5	23,5
22,5	24	23	22,5	24	25

Чоловіки					
26	28,5	27,5	29,5	26,5	30,5
27,5	27	29	27	28,5	27,5
28	25	26	28	30	27
26,5	27,5	28	29,5	26,5	29
28	29	27	26,5	28,5	27,5
27,5	28	28	25,8	29	28
26,5	27,5	29,5	27,5	26	30
29,5	25,5	27	28,5	28	27
27	28,5	29	26	26,5	28,5
28	27,5	28,5	27,5	29	27

Впевніться в тому, що розподіл частот близький до нормального розподілу. Проведіть на основі побудованого полігону криву нормального розподілу і перелічіть її властивості. Знайдіть середнє значення вибірки.

§ 21 СПОЛУКИ З ПОВТОРЕННЯМИ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІЛЬШ СКЛАДНИХ КОМБІНАТОРНИХ ЗАДАЧ

21.1. Сполуки з повтореннями

Таблиця 36

<table>
<tr><td colspan="2">Розміщення з повтореннями</td></tr>
<tr><td colspan="2">Розміщенням з повтореннями з n елементів по k називається скінченна послідовність, яка складається з k елементів (a_1, a_2, ..., a_k) деякої n-елементної множини M</td></tr>
<tr><td>Формула числа розміщень з повтореннями</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$\widetilde{A}_n^k = n^k$</td><td>Кількість різних тризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри можуть повторюватися, дорівнює
$\widetilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Перестановки з повтореннями</td></tr>
<tr><td colspan="2">Перестановкою з повтореннями складу $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ з елементів a_1, a_2, ..., a_m деякої множини M називається будь-яка скінченна послідовність, яка складається з n елементів, і в яку елемент a_1 входить k_1 раз, елемент a_2 входить k_2 раз, ..., елемент a_m входить k_m раз</td></tr>
<tr><td>Формула числа перестановок з повтореннями</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$\widetilde{P}_n = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdot\ldots\cdot k_m!}$,
де $k_1 + k_2 + \ldots k_m = n$</td><td>Кількість різних шестизначних чисел, які можна скласти з трьох двійок, двох сімок і однієї п'ятірки, дорівнює
$\widetilde{P}_6 = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \frac{720}{6\cdot 2\cdot 1} = 60$
(враховано, що 3 + 2 + 1 = 6).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Комбінації з повтореннями</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо задана n-елементна множина, то комбінаціями з повтореннями з n елементів по k називаються набори, до кожного з яких входить k заданих елементів (не обов'язково різних) і які відрізняються лише складом елементів (хоча б одним елементом).</td></tr>
<tr><td>Формула числа комбінацій з повтореннями</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$</td><td>Якщо у продажу є квіти чотирьох сортів, то різних букетів, що складаються з 7 квіток, можна скласти
$\widetilde{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!- 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 36

Схема розв'язування комбінаторних задач	
Вибір правила	
Правило суми	Правило добутку
Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то ***A* або *B*** можна вибрати $(m + n)$ способами.	Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B — n способами, то ***A* і *B*** можна вибрати $(m \cdot n)$ способами.
Вибір формули	

Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?

Так → Чи усі елементи входять до сполуки? (Так → Перестановки; Ні → Розміщення)

Ні → Комбінації

Перестановки		Розміщення		Комбінації	
без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями	без повторень	з повтореннями
$P_n = n!$	$\widetilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$, де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\widetilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\widetilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

21.1.1. Розміщення з повтореннями

Пояснення й обґрунтування

Для введення поняття розміщення з повтореннями нагадаємо поняття послідовності, яким ви користувалися в курсі алгебри 9 класу.

Наприклад, розглянемо послідовність (a_n) двозначних чисел, які закінчуються цифрою 5:

$$15;\ 25;\ 35;\ 45;\ 55;\ 65;\ 75;\ 85;\ 95.$$

У цій послідовності

$$a_1 = 15,\ a_2 = 25,\ a_3 = 35,\ a_4 = 45,\ a_5 = 55,\ a_6 = 65,\ a_7 = 75,\ a_8 = 85,\ a_9 = 95.$$

Можна сказати, що кожному натуральному числу від 1 до 9 поставили у відповідність єдине двозначне натуральне число, яке закінчується цифрою 5. Тим самим задана функція, областю визначення якої служить множина $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, а областю значень — множина $\{15; 25; 35; 45; 55; 65; 75; 85; 95\}$.

Тоді можна дати таке означення послідовності.

Функція, областю визначення якої є множина натуральних чисел або множина перших *n* натуральних чисел, називається *послідовністю*.

Якщо послідовність визначена на множині всіх натуральних чисел, то її називають *нескінченною послідовністю*, а якщо послідовність визначена на множині перших n натуральних чисел, то її називають *скінченною*.

Розміщенням з повтореннями з n елементів по k **називається скінченна послідовність, яка складається з *k* елементів (a_1, a_2, ..., a_k) деякої *n*-елементної множини *M*.**

Наприклад, із множини з трьох цифр {1; 5; 7} можна скласти такі розміщення з двох елементів з повтореннями:

(1; 1), (1; 5), (1; 7), (5; 5), (5; 7), (7; 7), (5; 1), (7; 1), (7; 5).

Кількість розміщень з n елементів по k з повтореннями позначається $\tilde{A}_n^k$ (хвиляста риска вказує на можливість повторення елементів). Як бачимо, $\tilde{A}_3^2 = 9$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти розміщень з n елементів по k. Складання розміщення уявимо собі як послідовне заповнення k місць, які ми будемо зображати у вигляді клітинок (рис. 167). На перше місце ми можемо вибрати один з n елементів заданої множини (тобто елемент для першої клітинки можна вибрати n способами). Далі, якщо елементи можна повторювати, то на кожне наступне місце ми знову можемо вибрати один з n елементів заданої множини (рис. 167).
Оскільки нам потрібно вибрати елементи і на перше місце, і на друге, ..., і на k-те, то використовуємо правило добутку і одержуємо таку

формулу числа розміщень з *n* елементів по *k* з повтореннями:

$$\tilde{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ множників}} = n^k$$

Наприклад, $\tilde{A}_3^2 = 3^2 = 9$ (що співпадає з відповідним значенням, одержаним вище).

При розв'язуванні найпростіших комбінаторних задач важливо правильно вибрати формулу, за якою будуть проводитися обчислення. Для цього досить з'ясувати:

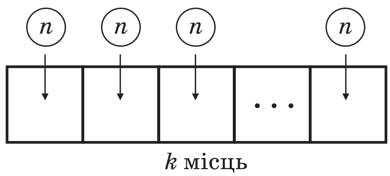


Рис. 167

— *Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?*
— *Чи всі задані елементи входять до одержаної сполуки?*

Якщо, наприклад, порядок слідування елементів враховується і з n заданих елементів у сполуці використовується тільки k елементів, то за означенням — це розміщення з n елементів по k. Після визначення виду сполуки слід також з'ясувати, *чи можуть елементи в сполуці повторюватися*, тобто з'ясувати, яку формулу потрібно використати — для кількості сполук без повторень чи з повтореннями.

Приклади розв'язання завдань

Приклад 1 Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо: 1) цифри в числі не повторюються; 2*) цифри в числі можуть повторюватися.

Розв'язання

▶ Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, дорівнює числу розміщень з 7 елементів по 3. Тобто для завдання 1 одержуємо

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210,$$

для завдання 2*: $\tilde{A}_7^3 = 7^3 = 343$. ◁

Коментар

Для вибору формули з'ясовуємо, що для чисел, які ми будемо складати, порядок враховується і не всі елементи вибираються (тільки 3 із заданих семи). Отже, відповідна сполука — розміщення з 7 елементів по 3 (без повторень для завдання 1 і з повтореннями для завдання 2).

Приклад 2* Знайдіть кількість трицифрових чисел, які можна скласти з цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, якщо: 1) цифри в числі не повторюються; 2) цифри в числі можуть повторюватися.

Розв'язання

▶ 1) Кількість трицифрових чисел, які можна скласти з семи цифр (серед яких немає цифри 0), дорівнює числу розміщень із 7 елементів по 3, тобто A_7^3.

Але серед даних цифр є цифра 0, з якої не може починатися трицифрове число. Тому з розміщень із 7 елементів по 3 необхідно вилучити ті розміщення, у яких першим елементом є цифра 0. Їх кількість дорівнює числу розміщень із 6 елементів по 2,

Коментар

Вибір формули проводиться таким самим чином, як і в прикладі 2. Слід врахувати, що коли число, складене з трьох цифр, починається цифрою 0, то воно не вважається трицифровим. Отже, для відповіді на питання задачі можна спочатку з заданих 7 цифр утворити всі числа, що складаються з 3 цифр (див. приклад 2), а потім від кількості одержаних чисел відняти кількість тих чисел, які складені з трьох цифр, але починаються цифрою 0.

тобто A_6^2. Отже, шукана кількість трицифрових чисел дорівнює
$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180.$ ◁

▶ 2) На перше місце в трицифровому числі ми можемо поставити будь-яку цифру, крім 0, — всього 6 можливостей. Якщо цифри можна повторювати, то на друге місце можна поставити будь-яку з 7 заданих цифр — маємо 7 можливостей. Тоді на третє місце знову можна поставити будь-яку з 7 заданих цифр — теж 7 можливостей. Оскільки ми повинні заповнити і перше місце, і друге, і третє, то за правилом добутку одержуємо, що шукана кількість трицифрових чисел дорівнює: $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$. ◁

В останньому випадку ми фактично будемо з усіх цифр без нуля (їх 6) складати двоцифрові числа. Тоді їх кількість дорівнює числу розміщень з 6 елементів по 2 (див. розв'язання завдання 1).

Також можна виконати безпосереднє обчислення, послідовно заповнюючи три місця в трицифровому числі і використовуючи правило добутку (див. розв'язання завдання 2). У цьому випадку зручно унаочнити міркування, зображаючи відповідні розряди в трицифровому числі у вигляді клітинок, наприклад так:

1)	6 можливостей	6 можливостей	5 можливостей
2)	6 можливостей	7 можливостей	7 можливостей

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається розміщенням з n елементів по k:
   а) без повторень, б) з повтореннями. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k:
   а) без повторень; б*) з повтореннями. Наведіть приклади її використання.
3. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа розміщень з n елементів по k з повтореннями.

Вправи

1. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 4, 5, 6, 8, 9, якщо: 1) цифри в числі не повторюються; 2) цифри в числі можуть повторюватися?

2. Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 0, 1, 3, 5, 7, якщо: 1) цифри в числі не повторюються; 2) цифри в числі можуть повторюватися?

3. Скільки існує семицифрових телефонних номерів, у яких перша цифра відмінна від нуля?

4. Скільки різних трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5 так, щоб одержані числа були: 1) парними; 2) кратними 5?

21.1.2. Перестановки з повтореннями

Пояснення й обґрунтування

Якщо ми будемо переставляти цифри в числі 2226 так, щоб одержати різні чотирицифрові числа, то одержимо *перестановки з повтореннями*, складені з трьох двійок і однієї шістки: (2, 2, 2, 6), (2, 2, 6, 2), (2, 6, 2, 2), (6, 2, 2, 2) — всього 4 перестановки (відповідно одержуємо чотири чотирицифрові числа: 2226, 2262, 2622, 6222).

Перестановкою з повтореннями складу $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ *з елементів* $a_1, a_2, \ldots, a_m$ деякої множини M називається будь-яка скінченна послідовність, яка складається з n елементів, і в яку елемент a_1 входить k_1 раз, елемент a_2 входить k_2 раз, ..., елемент a_m входить k_m раз.

Кількість перестановок з повтореннями з n елементів позначають $\tilde{P}_n$. Інколи, щоб підкреслити, що в заданій перестановці з n елементів k_1 разів повторюється перший елемент a_1, k_2 разів повторюється другий елемент a_2, ..., k_m разів повторюється m-й елемент a_m (сума $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$), використовується також позначення $P(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Зокрема, у розглянутому прикладі можна записати: $\tilde{P}_4 = P(3, 1) = 4$.

З'ясуємо, скільки всього можна скласти перестановок з повтореннями з n елементів, якщо в кожній з перестановок k_1 разів повторюється елемент a_1; k_2 разів повторюється елемент a_2, ..., k_m разів повторюється елемент a_m (де $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$). Складання перестановки уявимо собі як послідовне заповнення n місць, які ми будемо зображати у вигляді клітинок (на рисунку 168 зображена одна з таких перестановок).

Спочатку будемо вважати, що всі n елементів, з яких складається перестановка, різні. Тоді одержуємо перестановки без повторень, їх кількість $P_n = n!$. Далі врахуємо, що при переставлянні місцями елементів a_1, які займають якісь k_1 місць (не обов'язково поряд), розглянута перестановка не зміниться (оскільки ми переставляємо однакові елементи). Елементи, які стоять на k_1 місцях, можна переставити $k_1!$ способами. Підраховуючи загальну кількість перестановок із n різних елементів, ми користувалися правилом добутку (див. с. 234). Тоді в одержаному добутку $n!$, у випадку повторення k_1 раз елемента a_1, зайвим є добуток $k_1!$. Щоб

$$\overbrace{\underbrace{\boxed{a_1}\boxed{a_1}\boxed{\cdots}\boxed{a_1}}_{k_1\text{ разів}}\underbrace{\boxed{a_2}\boxed{a_2}\boxed{\cdots}\boxed{a_2}}_{k_2\text{ разів}}\boxed{\cdots}\underbrace{\boxed{a_m}\boxed{a_m}\boxed{\cdots}\boxed{a_m}}_{k_m\text{ разів}}}^{n\text{ місць}}$$

Рис. 168

позбутися цього зайвого множника, досить число $n!$ розділити на число $k_1!$. Аналогічно, якщо елемент a_2 повторюється k_2 разів, то в одержаному добутку $n!$ зайвим є добуток $k_2!$. Щоб позбутися цього множника, досить число $n!$ розділити на число $k_2!$. Повторюючи ці міркування m разів, одержуємо, що **кількість перестановок з повтореннями з n елементів, у кожній з яких k_1 разів повторюється елемент a_1, k_2 разів повторюється елемент a_2, ..., k_m разів повторюється елемент a_m (де $k_1 + k_2 + ...+ k_m = n$), дорівнює**

$$\tilde{P}_n = P(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

Наприклад, кількість перестановок з повтореннями, складених з трьох двійок і однієї шістки, дорівнює $\tilde{P}_4 = P(3, 1) = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1} = 4$ (що співпадає із значенням, одержаним вище за допомогою безпосереднього підрахунку кількості таких перестановок).

Приклади розв'язання завдань

Приклад Знайдіть кількість різних чотирицифрових чисел, які можна одержати при перестановці цифр 1, 1, 4, 4.

Р о з в ' я з а н н я

▶ Шукана кількість чотирицифрових чисел дорівнює

$$\tilde{P}_4 = P(2; 2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 6. \quad \triangleleft$$

К о м е н т а р

Оскільки порядок елементів враховується і для одержання чотирицифрового числа потрібно використати всі елементи, то потрібна сполука — це перестановки з повторенням з 4 елементів. Їх кількість — $\tilde{P}_4$.

Також слід врахувати склад цих перестановок:

$4 = 2 + 2$ (2 цифри 1 і 2 цифри 4).

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається перестановкою з n елементів: а) без повторень; б) з повтореннями. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа перестановок з n елементів: а) без повторень; б) з повтореннями. Наведіть приклади її використання.
3. Обґрунтуйте формулу для обчислення числа перестановок з n елементів з повтореннями.

Вправи

1. Скільки різних п’ятицифрових чисел можна одержати при перестановці цифр 2, 2, 3, 3, 5?
2. Скільки шестицифрових чисел можна скласти:
   1) з двох цифр 5 і чотирьох цифр 7; 2) з трьох цифр 5 і трьох цифр 7?
3. Знайдіть суму цифр усіх чотирицифрових чисел, які можна одержати при перестановці цифр 0, 0, 6, 6.
4. Скількома способами можна розкласти 28 предметів в чотири різні ящики так, щоб в кожному ящику було 7 предметів.

21.1.3. Комбінації з повтореннями

Пояснення й обґрунтування

Нехай задано n-елементну множину (тобто множина, яка містить n різних елементів). Будемо складати набори, які містять k елементів цієї множини (але один і той самий елемент може входити до набору декілька разів). Два такі набори будемо вважати однаковими тоді і тільки тоді, коли вони мають однаковий склад (не враховуючи порядок слідування елементів у наборі). Такі набори назвемо *комбінаціями з повтореннями з n елементів по k*. Тобто

якщо задано n-елементну множину, то *комбінаціями з повтореннями з n елементів по k* називаються набори, до кожного з яких входить k заданих елементів (не обов’язково різних) і які відрізняються лише складом елементів (хоча б одним елементом).

Наприклад, із двох літер $\{a; b\}$ можна скласти такі комбінації з повтореннями по чотири елементи: *aaaa*, *aaab*, *aabb*, *abbb*, *bbbb*. (Зазначимо, що, згідно з нашою домовленістю, наприклад, набори *aaab* і *abaa* однакові, оскільки вони мають однаковий склад — три літери a і одна літера b.)

Кількість комбінацій з повтореннями з n елементів по k позначимо $\tilde{C}_n^k$.

Як бачимо, $\tilde{C}_2^4 = 5$.

З’ясуємо, скільки всього можна скласти комбінацій з повтореннями з n елементів по k. Складання комбінації уявимо собі як заповнення (у будь-якому порядку) k місць, які ми будемо зображати у вигляді клітинок (рис. 169). Повторення елемента уявимо собі як його копіювання і розміщення на відповідному місці копії цього елемента. Для того щоб в останню клітинку ми могли помістити будь-який із заданих n елементів, у попередні

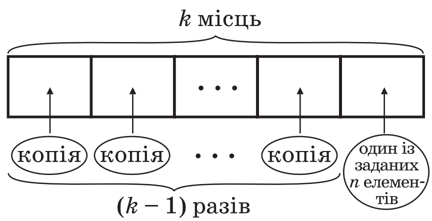


Рис. 169

$(k - 1)$ клітинки ми повинні помістити копії вибраних елементів (див. рис. 169). Але тоді фактично ми повинні розмістити $n + k - 1$ елементів (n заданих елементів та ще $k - 1$ копія) без повторень на k місць (не враховуючи порядок слідування елементів), а це можна зробити C_{n+k-1}^{k} способами. Отже,

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Наприклад, $\tilde{C}_2^4 = C_{2+4-1}^4 = C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1} = 5$ (що співпадає із значенням, одержаним вище за допомогою безпосереднього підрахунку кількості таких комбінацій з повтореннями).

Приклади розв'язання завдань

Приклад У поштовому відділенні продаються листівки 5 видів. Знайдіть кількість способів купівлі 7 листівок.

Розв'язання

Шукане число способів дорівнює числу комбінацій з повтореннями з 5 елементів по 7, тобто

$$\tilde{C}_5^7 = C_{5+7-1}^7 = C_{11}^7 = \frac{11!}{7!\cdot 4!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 330.$$

Коментар

При виборі листівок порядок їх розміщення не враховується, отже, відповідні сполуки — комбінації. Умова задачі не забороняє купувати однакові листівки, отже, використовуємо формулу числа комбінацій з повтореннями: $\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.

Запитання для контролю

1. Поясніть, що називається комбінаціями з n елементів по k:
   а) без повторень; б) з повтореннями. Наведіть приклади.
2. Запишіть формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k:
   а) без повторень; б) з повтореннями.
   Наведіть приклади її використання.
3. Обгрунтуйте формулу для обчислення числа комбінацій з n елементів по k з повтореннями.

Вправи

1. Скільки існує трикутників, довжини сторін яких набувають будь-яких трьох із таких значень: 4, 5, 6, 7?

2. У поштовому відділенні продаються листівки 10 сортів. Скількома способами можна купити в ньому 12 листівок? 8 листівок? Скількома способами можна купити 8 різних листівок?

3. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких виражаються натуральними числами від 1 до 10?

21.2. Розв'язування більш складних комбінаторних задач

При розв'язуванні комбінаторних задач із вибором декількох елементів доводиться з'ясовувати, яким правилом (суми чи добутку — див. с. 234) потрібно скористатися, а після цього визначати, за якими формулами ми зможемо порахувати кількість відповідних сполук. Схема таких міркувань наведена в таблиці 36 на с. 343.

Нагадаємо, що у випадку, коли нам доводиться вибирати набір, у який входить **і перший, і другий, і третій, і т. д. елементи**, способи вибору кожного елемента потрібна **перемножати**, а якщо доводиться вибирати **або перший елемент, або другий, або третій і т. д. елемент**, способи вибору кожного елемента потрібна **додавати**.

При виборі формули для підрахунку кількості відповідних сполук слід мати на увазі, що в означенні тільки одного виду сполук — комбінацій — не враховується порядок слідування елементів. А ті сполуки, де враховується порядок слідування елементів (розміщення і перестановка), розрізняються тим, що до перестановки входять всі задані елементи, а до розміщення — не всі (звичайно, за винятком того випадку, коли ми розглядаємо перестановку як частковий випадок розміщення).

Таким чином, як уже відмічалося, для вибору відповідної формули досить дати відповідь на два запитання (див. схему на с. 233).

— Чи враховується порядок слідування елементів? (Якщо «ні», то це комбінація; якщо «так», то відповідаємо на друге питання.)

— Чи всі елементи входять до сполуки? (Якщо «так», то це перестановки, якщо «ні», то це розміщення.)

Крім того, щоб вибрати відповідну формулу для сполук (без повторень чи з повтореннями) потрібно додатково з'ясувати, чи можуть елементи в сполуці повторюватися. Наведемо приклади таких міркувань (простіші приклади було наведено в § 18).

Приклад 1 Збори з 60 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів редакційної комісії по підготовці проекту постанови зборів. Скількома способами це можна зробити?

Р о з в' я з а н н я

▶ 1) Оскільки потрібно вибрати і голову, і секретаря, і членів редакційної комісії, то будемо використовувати правило добутку.

2) Спочатку будемо обирати голову і секретаря. Задаємо собі запитання: «Чи враховується порядок слідування елементів?» Відповідь: «Так» (бо перший обраний буде головою, а другий — секретарем зборів). Задаємо собі друге питання: «Чи всі елементи входять у сполуку?» Відповідь: «Ні» (бо обираємо двох з 60 чоловік). Отже, відповідна сполука буде роз-

міщенням (без повторень) з 60 елементів по 2, і число таких розміщень дорівнює A_{60}^2.

Аналогічно обираємо трьох членів редакційної комісії (з тих 58 осіб, які залишилися). Знову задаємо собі запитання: «Чи враховується порядок елементів?» Відповідь: «Ні» (бо незалежно від того, у якому порядку будуть обрані члени редакційної комісії, вони всі виконуватимуть одну і ту саму роботу). Отже, відповідна сполука буде комбінацією (без повторень) з 58 елементів по 3, і число таких комбінацій дорівнює C_{58}^3.

Тоді вибір і голови, і секретаря, і трьох членів редакційної комісії виконується $A_{60}^2 \cdot C_{58}^3$ способами, тобто

$$A_{60}^2 \cdot C_{58}^3 = \frac{60!}{(60-2)!} \cdot \frac{58!}{3! \cdot (58-3)!} = 10 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 = 109\,230\,240. \quad \triangleleft$$

З а у в а ж е н н я. Як уже відмічалося, відповідь до цієї задачі можна не записувати у вигляді числа, а залишити у вигляді $A_{60}^2 \cdot C_{58}^3$.

Деякі комбінаторні задачі пов'язані з цифровим записом числа. Аналізуючи умову і вимогу таких задач, часто зручно зображати позиції, які може займати кожна цифра, у вигляді пустих клітинок (рис. 170, *а*–*в*).

Приклад 2 Скільки парних трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5:

1) якщо цифри в числі не повторюються;
2) якщо цифри повторюються?

Р о з в ' я з а н н я

▶ Щоб число було парним, у нього остання цифра повинна бути парною, тобто із заданих цифр це 2 (рис. 170, *б*) або 4 (рис. 170, *в*).

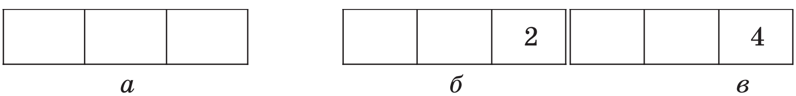


Рис. 170

Оскільки умові задачі задовольняє або перший варіант (остання цифра 2), або другий (остання цифра 4), то застосуємо правило суми.

Обчислимо кількість парних трицифрових чисел у кожному варіанті. Задаємо собі запитання: «Чи враховується порядок слідування елементів у сполуці?» Відповідь: «Так» (бо, наприклад, 352 і 532 — різні числа). Задаємо друге запитання: «Чи всі елементи входять у сполуку»? Відповідь: «Ні» (бо у нас тільки два вільних місця, а на них претендують 4 цифри (або 5 — якщо цифри можуть повторюватися). Отже, маємо справу з розміщеннями: 1) з чотирьох елементів по два (без повторень) — A_4^2; 2) з п'яти елементів по два (з повтореннями) — $\tilde{A}_5^2$.

Кількості можливих трицифрових чисел, що закінчуються на 2 і на 4 (рис. 170, *б* і *в*), однакові, тому за правилом суми загальна кількість парних трицифрових чисел буде в завданні:

1) $2A_4^2 = 2 \cdot \frac{4!}{(4-2)!} = 2 \cdot \frac{4!}{2!} = 24;$

2) $2\tilde{A}_5^2 = 2 \cdot 5^2 = 50.$ ◁

Приклад 3 Ліфт, у якому знаходиться 9 пасажирів, може зупинятися на 10 поверхах. Пасажири виходять групами по дві, три і чотири особи. Скількома способами це може відбутися?

Розв'язання

▶ Оскільки за умовою 9 пасажирів мають вийти групами по 2, 3 і 4 особи, то ліфт має зробити 3 зупинки (2 + 3 + 4 = 9). Окремо підрахуємо кількість способів поділу пасажирів на три групи (по 2, 3 і 4 чоловіки) і окремо — кількість способів вибору трьох зупинок ліфта. Для розв'язування задачі потрібно вибрати і групи пасажирів, і поверхи для їх виходу, отже, будемо використовувати правило добутку.

З 9 пасажирів можна вибрати групу з 2 осіб (не враховуючи порядок їх вибору, оскільки вони виходять на одному поверсі) C_9^2 способами. З семи пасажирів, що залишилися, можна вибрати групу з 3 осіб C_7^3 способами. Після цього залишиться 1 група з 4 осіб (формально її можна вибрати $C_4^4 = 1$ способами). Отже, групи можна скласти $C_9^2 C_7^3 C_4^4$ способами.

Три зупинки з 10 поверхів можна вибрати A_{10}^3 способами (порядок враховується, оскільки групи можуть виходити в різному порядку). Тоді шукане число дорівнює $A_{10}^3 C_9^2 C_7^3 C_4^4 = \frac{10!}{7!} \cdot \frac{9!}{2! \cdot 7!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot 1 = \frac{10!}{4}$. ◁

Зауважимо, що для розв'язування багатьох комбінаторних задач головним є не стільки знання комбінаторних формул, скільки вміння побудувати доцільну математичну модель заданої ситуації.

Приклад 4 У деякому казковому королівстві не було двох людей з однаковим набором зубів. Якою може бути максимальна кількість жителів цього королівства, якщо у людини 32 зуба?

Розв'язання

▶ Перенумеруємо всі зуби, які повинні бути у людини, числами від 1 до 32. Зобразимо набір зубів у кожного жителя королівства у вигляді 32 клітинок (рис. 171) і в кожну клітинку поставимо цифру 1, якщо на цьому місці у розглянутого жителя зуб є, і цифру 0, якщо на цьому місці у нього зуба немає (на рисунку зображено один з можливих наборів зубів).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0

0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32

Рис. 171

Тоді кожен житель королівства буде закодований якоюсь впорядкованою послідовністю з 32 нулів і одиниць. За умовою, у королівстві немає людей з однаковим набором зубів, тому максимальна кількість людей у королівстві дорівнює кількості таких наборів. Ці набори є розміщеннями з повтореннями з двох елементів (0 і 1) по 32, отже, їх кількість дорівнює $\tilde{A}_2^{32} = 2^{32}$. Таким чином, максимальна кількість людей у казковому королівстві може дорівнювати 2^{32} (це приблизно $4 \cdot 10^9$). ◁

Вправи

1. Скільки існує шестицифрових чисел, які діляться на 5, якщо:
   1) цифри в числі не повторюються;
   2) цифри в числі можуть повторюватися?
2. На одній із паралельних прямих дано 100 точок, а на другій — 200. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?
3. Скільки існує семицифрових чисел, у яких кожні дві сусідні цифри різної парності?
4. Скількома способами можна вибрати 4 карти з колоди із 36 карт так, щоб отримати: 1) одну; 2) дві; 3) три; 4) чотири різні масті?
5. Скільки трицифрових чисел, які діляться на 3, можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:
   1) цифри в числі не повторюються;
   2) цифри в числі можуть повторюватися?
6. Чотири стрільці повинні вразити вісім мішеней (кожен по дві). Скількома способами вони можуть розподілити мішені між собою?
7. Поїзд метро робить 16 зупинок, на яких виходять всі пасажири (кожен на своїй). Скількома способами можуть розподілитися між цими зупинками 100 пасажирів, які зайшли в поїзд на станції, з якої починається рух?
8. Серед членів шахового гуртка дві дівчинки і 7 хлопців. Для участі в змаганнях необхідно скласти команду з чотирьох осіб, у яку обов'язково повинна ввійти хоча б одна дівчинка. Скількома способами це можна зробити?

9. Скількома способами можна розкласти 20 однакових куль у 6 різних ящиків, якщо:
1) жоден ящик не повинен бути порожнім;
2) деякі ящики можуть бути порожніми?

10. Скількома способами натуральне число n можна подати у вигляді суми k натуральних доданків (подання, які відрізняються порядком доданків, вважаються різними)?

§22 КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

22.1. Алгебраїчна форма комплексного числа

Таблиця 37

<table>
<tr><td colspan="2">1. Поняття комплексного числа</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Позначення і терміни</td></tr>
<tr><td>Комплексними числами називаються числа виду $a + bi$, де a і b — дійсні числа ($a \in R$, $b \in R$), i — деяке (не дійсне) число, квадрат якого дорівнює -1:
$i^2 = -1$.</td><td>$z = a + bi$ — комплексне число,
a — дійсна частина комплексного числа,
bi — уявна частина комплексного числа,
b — коефіцієнт при уявній частині,
i — уявна одиниця.
Дійсне число a вважається рівним комплексному числу $a + 0i$, тобто $a = a + 0i$, де $a \in \boldsymbol{R}$, зокрема,
$0 = 0 + 0i$.
Числа $z = a + bi$ і $\bar{z} = a - bi$ називають спряженими комплексними числами.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Рівність комплексних чисел</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Два комплексних числа називаються рівними, якщо рівні їх дійсні частини і рівні коефіцієнти при уявних частинах</td><td>$a + bi = c + di \Leftrightarrow \begin{cases} a = c, \\ b = d \end{cases}$
$(a, b, c, d \in \boldsymbol{R})$
Якщо $2 + xi = y + 5i$, то $y = 2$, $x = 5$.</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 37

3. Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі		
Орієнтир	Приклад	Запис у загальному вигляді (означення)
	Додавання	
Арифметичні дії (додавання, віднімання, множення і ділення) над комплексними числами виконуються як дії над звичайними буквеними виразами (одночленами і двочленами), але з урахуванням того, що $i^2 = -1$.	$(6+7i)+(3-5i) =$ $= 6+3+7i-5i = 9+2i$	$(a+bi)+(c+di) =$ $= (a+c)+(b+d)i$
	Віднімання	
	$(9+2i)-(3-5i) =$ $= 9-3+2i+5i = 6+7i$	$(a+bi)-(c+di) =$ $= (a-c)+(b-d)i$
	Множення	
	$(3+2i)\cdot(4+3i) =$ $= 12+9i+8i+6i^2 =$ (заміняємо i^2 на -1) $= 12+17i-6 = 6+17i$	$(a+bi)(c+di) =$ $= (ac-bd)+(ad+bc)i$
	Ділення	
Виконуючи ділення комплексних чисел, зручно спочатку домножити чисельник і знаменник на число, спряжене знаменнику.	$\frac{6+17i}{4+3i} = \frac{(6+17i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} =$ $= \frac{24-18i+68i-51i^2}{16-9i^2} =$ $= \frac{24+50i+51}{16+9} = \frac{75+50i}{25} = 3+2i$	$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} =$ $= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

4. Властивості спряжених чисел

Якщо $z = a+bi$, $\bar{z} = a-bi$, де $a \in R$, $b \in R$, то

$z+\bar{z} = 2a \in R$,

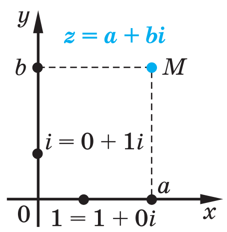
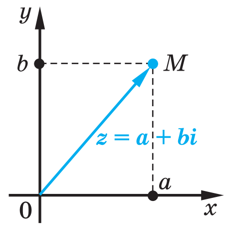
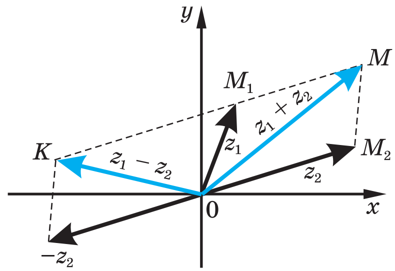
$z\cdot\bar{z} = a^2 - b^2i^2 = a^2+b^2 \in R$.

Сума і добуток двох спряжених комплексних чисел є число дійсне.

5. Знаходження степенів числа i

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2\cdot i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^5 = i^4\cdot i = i$	$i^6 = i^4\cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4\cdot i^3 = -i$
$i^8 = (i^4)^2 = 1$			
…	…	…	…
$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i^{4k}\cdot i = i$	$i^{4k+2} = i^{4k}\cdot i^2 = -1$	$i^{4k+3} = i^{4k}\cdot i^3 = -i$

Продовж. табл. 37

<table>
<tr><td colspan="3">6. Геометричне зображення комплексних чисел</td></tr>
<tr><td>у вигляді точок координатної площини</td><td colspan="2">у вигляді векторів на координатній площині</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td rowspan="2">

$z_1 = a_1 + b_1 i \leftrightarrow \overline{OM_1}$
$z_2 = a_2 + b_2 i \leftrightarrow \overline{OM_2}$
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \leftrightarrow \overline{OM}$
$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \leftrightarrow \overline{OK}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">**Геометричне зображення комплексних чисел встановлює взаємно однозначну відповідність**
між комплексними числами і точками площини (що називається комплексною площиною)
$z = a + bi \leftrightarrow M\ (a;\ b)$
між комплексними числами і радіус-векторами (векторами, відкладеними від початку координат)
$z = a + bi \leftrightarrow \overline{OM}$</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Розширення поняття числа. Поняття комплексного числа. Розглянемо, як може відбуватися розширення поняття числа. Найпростішою числовою множиною є множина *N натуральних чисел*. У цій множині завжди можна виконати дії додавання і множення (тобто сума двох натуральних чисел є натуральне число і добуток двох натуральних чисел є натуральне число). Віднімання виконується не завжди ($5 - 3 = 2$, а різниця $3 - 5$ не виражається натуральним числом).

Щоб дію віднімання можна було виконати завжди, необхідно розширити множину натуральних чисел, доповнивши її від'ємними числами і нулем. У результаті такого розширення одержали множину *Z цілих чисел*.

Однак у множині цілих чисел не завжди можна виконати дію ділення. Щоб дія ділення (на число, не рівне нулю) завжди виконувалася, необхідно розширити множину цілих чисел, доповнивши його множиною всіх звичайних дробів (тобто числами виду $\frac{m}{n}$, де m і n — цілі числа і $n \neq 0$). У результаті такого розширення ми дістанемо множину ***Q*** *раціональних чисел*. У цій множині завжди можна виконати дії додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на нуль).

Але і в множині раціональних чисел не завжди можна виконати дію добування кореня з додатного числа (наприклад, $\sqrt{2}$ не є раціональним числом). Щоб дія добування кореня з додатного числа завжди виконувалася, необхідно розширити множину раціональних чисел, доповнивши її *ірраціональними числами*. У результаті такого розширення ми одержуємо множину ***R*** *дійсних чисел*. У цій множині, крім дій додавання, віднімання, множення і ділення (крім ділення на нуль), також завжди можна виконати дію добування квадратного кореня з невід'ємного числа. Зазначимо, що кожне розширення множини чисел проводять таким чином, щоб у новій множині виконувалися всі закони дій, які виконувалися у попередній множині.

Однак у множині дійсних чисел не можна добути квадратний корінь з від'ємного числа, тобто в множині дійсних чисел не можна розв'язати навіть такі найпростіші, на перший погляд, рівняння, як $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + 9 = 0$ та ін. Таким чином, ми приходимо до необхідності розширити множину дійсних чисел, приєднавши до неї нові числа, такі, щоб у новій множині C так званих комплексних чисел завжди можна було добути корінь квадратний (чи корінь n-го степеня) не тільки з додатного, а й з від'ємного числа.

Зауважимо, що для того щоб добути корінь квадратний з від'ємного числа, досить уміти добувати корінь квадратний з (-1). Тоді, наприклад, якщо виконуються відомі правила дій, то $\sqrt{-9} = \sqrt{9\cdot(-1)} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$.

Число нового виду $\sqrt{-1}$ прийнято позначати знаком i (буквою i) і називати *уявною одиницею* (i — перша літера латинського слова *imaginarius* — уявний). За означенням квадратного кореня, квадрат числа i дорівнює (-1), тобто $i^2 = -1$ (цю рівність приймемо за означення числа i). За допомогою нового числа можна записати значення кореня квадратного з будь-якого від'ємного числа, наприклад, $\sqrt{-16} = \sqrt{16\cdot(-1)} = \sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = 4i^{*}$. Тоді вираз типу $2+\sqrt{-16}$ може бути записаний у вигляді $2 + 4i$.

Ми одержали вираз виду $a + bi$, де a і b — дійсні числа. Числа такого виду називаються *комплексними числами*. Отже,

***комплексними числами* називаються числа виду $a + bi$, де a і b — дійсні числа ($a \in R, b \in R$), i — деяке (не дійсне) число, квадрат якого дорівнює -1: $i^2 = -1$.**

* Для комплексних чисел знак $\sqrt{}$ уже не є знаком тільки арифметичного квадратного кореня, тому $\sqrt{-1} = \pm i$ (оскільки $(\pm i)^2 = i^2 = -1$), $\sqrt{-16} = \pm 4i$, а вираз $2+\sqrt{-16} = 2\pm 4i$. Більш докладно операцію добуванню кореня n-го степеня з комплексного числа розглянуто на с. 367.

У комплексному числі $a + bi$ число a називається *дійсною частиною,* а вираз bi називається *уявною частиною* (b — коефіцієнт при уявній частині).

При $a = 0$ ми одержуємо комплексне число виду $0 + bi = bi$, яке називають *чисто уявним числом.*

При $b = 0$ ми одержуємо комплексне число $a + 0i = a$, тобто дійсне число. Таким чином, ***дійсні числа є частиною множини комплексних чисел.*** Наприклад, $5 + 0i = 5$, $0 + 0i = 0$.

2. Поняття рівності комплексних чисел та операції над комплексними числами.

Два комплексних числа називаються *рівними*, якщо рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах,
тобто $a + bi = c + di$, тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$.

Наприклад, рівність $2 + xi = y - 5i$ при дійсних x і y можлива тільки при
$$y = 2 \text{ і } x = -5.$$

Дії додавання, віднімання і множення над комплексними числами виконуються за тими самими законами, що і над дійсними. Це дозволяє користуватися таким орієнтиром: ***для практичного виконання дій над комплексними числами досить виконувати ці операції так, ніби вираз $(a + bi)$ є не комплексне число, а двочлен. (При цьому необхідно враховувати, що i — це не змінна, а певне число, таке, що $i^2 = -1$, тому в результаті множення необхідно всюди замінити i^2 на (-1).)***

Але для того щоб мати право користуватися цим орієнтиром, необхідно відповідним чином дати означення дій над комплексними числами.

1) *Додавання комплексних чисел.* Нехай $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$. Тоді $z_1 + z_2 = (2 + 7) + (3+4)i = 9 + 7i$. Запис виконання відповідної операції в загальному вигляді і є *означенням суми двох комплексних чисел*.

Якщо $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *сумою* цих комплексних чисел називається комплексне число $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\, i$.

Зазначимо, що, як і для дійсних чисел, $z_1 + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = z_1$.

2) *Віднімання комплексних чисел.* Нехай $z_1 = 9 + 7i$, $z_2 = 2 + 3i$.
Тоді $z_1 - z_2 = (9 - 2) + (7 - 3)\, i = 7 + 4i$. Якщо позначити різницю розглянутих чисел через $z_3 = z_1 - z_2 = 7 + 4i$, то $z_3 + z_2 = (7 + 4i) + (2 + 3i) = 9 + 7i = z_1$. Тому для *означення дії віднімання* досить знати означення суми і рівності комплексних чисел.

***Різницею* двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$ називається таке комплексне число $z_3 = x + yi$, яке в сумі з z_2 дає z_1.**

Якщо $z_3 + z_2 = z_1$, то $(x + c) + (y + d)\, i = a + bi$. Згідно з означенням рівності комплексних чисел $x + c = a$, $y + d = b$. Тоді $x = a - c$, $y = b - d$. Отже, $z_1 - z_2 = x + yi = (a - c) + (b - d)\, i$.

3) *Множення комплексних чисел*. Нехай $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 7 + 4i$.
Тоді $z_1 \cdot z_2 = (2 + 3i) \cdot (7 + 4i) = 14 + 8i + 21i + 12i^2$. Заміняючи i^2 на (-1) одержуємо: $z_1 \cdot z_2 = 14 + 29i - 12 = 2 + 29i$.
Запис виконання відповідної операції в загальному вигляді і є *означенням добутку двох комплексних чисел*.

Якщо $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$, то *добутком* цих комплексних чисел називається комплексне число $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$.

Як і для дійсних чисел, *піднесення комплексного числа до натурального степеня* зводиться до послідовного множення числа на себе (але при цьому, як завжди при множенні, i^2 потрібно замінити на -1). Наприклад,

$$i^3 = i \cdot i \cdot i = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = i \cdot i \cdot i \cdot i = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1.$$

За означенням покладемо, що $\boldsymbol{i^0 = 1}$ (також покладемо, що при $z \neq 0$ $\boldsymbol{z^0 = 1}$).
Тоді, враховуючи, що $i^4 = 1$, одержуємо: $\boldsymbol{i^{4k}} = (i^4)^k = 1^k = \boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{i^{4k+1}} = i^{4k} \cdot i = \boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i^{4k+2}} = i^{4k} \cdot i^2 = \boldsymbol{-1}$, $\boldsymbol{i^{4k+3}} = i^{4k} \cdot i^3 = \boldsymbol{-i}$. Наприклад,

$$i^{23} = i^{20} \cdot i^3 = -i, \qquad i^{102} = i^{100} \cdot i^2 = -1.$$

Зауважимо, що при піднесенні комплексного числа $a + bi$ до квадрата чи до куба можна використовувати відповідні формули скороченого множення (заміняючи i^2 на -1). Наприклад, $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i$.

Введемо також поняття *спряжених комплексних чисел*, які нам будуть потрібні для практичного виконання ділення комплексних чисел.

Числа $z = a + bi$ і $\bar{z} = a - bi$ називають *спряженими* комплексними числами.

Наприклад, числа $z = 2 + 5i$ і $\bar{z} = 2 - 5i$ — спряжені. Знайдемо суму і добуток цих чисел:

$$z + \bar{z} = (2 + 5i) + (2 - 5i) = 4 \text{ — дійсне число,}$$

$$z \cdot \bar{z} = (2 + 5i) \cdot (2 - 5i) = 4 - 25i^2 = 4 + 25 = 29 \text{ — дійсне число.}$$

Сума і добуток двох спряжених комплексних чисел є число дійсне.

Якщо $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, де $a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$, то

$$\boldsymbol{z + \bar{z} = 2a} \text{ дійсне число } (2a \in \boldsymbol{R}).$$

$$\boldsymbol{z \cdot \bar{z}} = a^2 - b^2 i^2 = \boldsymbol{a^2 + b^2} \in \boldsymbol{R}.$$

4) *Ділення комплексних чисел*. Нехай потрібно розділити $z_1 = 2 + 29i$ на $z_2 = 2 + 3i$. Запишемо ділення за допомогою риски дробу і, користуючись основною властивістю дробу, домножимо чисельник і знаменник на число, спряжене до знаменника (щоб одержати в знаменнику дійсне число):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 29i}{2 + 3i} = \frac{(2 + 29i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 - 6i + 58i - 87i^2}{4 - 9i^2} = \frac{4 + 52i + 87}{4 + 9} = \frac{91 + 52i}{13} = 7 + 4i.$$

Але в прикладі на с. 360 (див. 3) ми одержали, що $(2 + 3i)(7 + 4i) = 2 + 29i$. Отже, і в множині комплексних чисел операцію ділення можна перевіряти за допомогою операції множення.

У загальному вигляді ділення комплексних чисел виконується так:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i. \qquad (1)$$

Зауважимо, що строге одержання формули (1) спирається на *означення частки комплексних чисел*, яке аналогічне до означення їх різниці.

Часткою **двох комплексних чисел $z_1 = a + bi$ і $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$) називається таке комплексне число $z_3 = x + yi$, яке при множенні на z_2 дає z_1.**

З цього означення одержуємо, що $z_3 \cdot z_2 = z_1$. Тобто $(x + yi)(c + di) = a + bi$.

Тоді за означенням рівності комплексних чисел $\begin{cases} xc-yd=a, \\ xd+yc=b. \end{cases}$ Помножимо перше рівняння системи на c, а друге — на d і додамо одержані рівняння. Маємо $x(c^2 + d^2) = ac + bd$. Оскільки $z_2 \neq 0$, то $c^2 + d^2 \neq 0$, отже, $x=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$. Аналогічно, якщо перше рівняння помножити на d, а друге — на c і відняти від другого рівняння перше, одержимо

$y(c^2 + d^2) = bc - ad$, отже, $y=\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. Тоді $\frac{z_1}{z_2}=z_3=x+yi=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$,

що співпадає з результатом, отриманим за формулою (1).

Таким чином, ми обґрунтували коректність використання наведеного практичного орієнтира для виконання дій над комплексними числами.

З наведених означень операцій над комплексними числами випливає справедливість для комплексних чисел тих основних властивостей операцій додавання і множення, які виконувалися для дійсних чисел (перевірте це самостійно).

Властивості додавання

1) $z + w = w + z$;
2) $(z + w) + t = z + (w + t)$;
3) $z + 0 = z$ $\quad(0 = 0 + 0i)$;
4) **Для кожного комплексного числа $z = a + bi$ існує протилежне число $(-z = -a - bi)$, таке, що** $z + (-z) = 0$;

Властивості множення

1′) $zw = wz$;
2′) $(zw)t = z(wt)$;
3′) $z \cdot 1 = z$ $\quad(1 = 1 + 0i)$;
4′) **Для кожного комплексного числа $z \neq 0$ існує обернене йому число $\frac{1}{z}$, таке, що $z\cdot\frac{1}{z}=1$.** Наприклад, для комплексного числа $z = c + di$ за формулою (1) маємо

$$\frac{1}{z}=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}i.$$

5) **Операції додавання і множення комплексних чисел об'єднані розподільним законом**

$$(z + w)\,t = zt + wt.$$

Для множини дійсних чисел ці основні властивості 1–5 (їх ще називають аксіомами поля дійсних чисел) визначають всі інші властивості дійсних чисел (крім властивостей впорядкування і неперервності, які визначаються в полі дійсних чисел іншими аксіомами). Оскільки основні властивості 1–5 виконуються і для комплексних чисел, то всі тотожності, які ви знаєте з курсу алгебри, залишаються справедливими і в множині комплексних чисел. Наприклад,

$$(z + w)^3 = z^3 + 3z^2w + 3zw^2 + w^3.$$

3. Геометричне зображення комплексних чисел. Кожне комплексне число $z = a + bi$ ($a \in \boldsymbol{R}$, $b \in \boldsymbol{R}$) можна зобразити точкою M на координатній площині з координатами $(a; b)$ (рис. 172). І навпаки, кожну точку $M\ (a; b)$ координатної площини можна вважати зображенням комплексного числа $z = a + bi$. У такому випадку кажуть, що геометричне зображення комплексних чисел у вигляді точок координатної площини встановлює взаємно однозначну відповідність між комплексними числами і точками площини (цю площину називають *комплексною площиною*).

Дійсні числа $a = a + 0i$ зображаються точками з координатами $(a; 0)$, які знаходяться на осі абсцис. Тому ця вісь комплексної площини називається дійсною віссю. Чисто уявні числа $bi = 0 + bi$ зображаються точками з координатами $(0; b)$, які знаходяться на осі ординат. Тому ця вісь комплексної площини називається уявною віссю.

Також комплексне число $z = a + bi$ на координатній площині можна зображати у вигляді так званого радіус-вектора $\overline{OM}$ (вектора з початком у початку координат і кінцем у точці $M\ (a; b)$ — тобто у вигляді вектора $\overline{OM}$ з координатами $(a; b)$) (рис. 173). Таке зображення теж встановлює взаємно однозначну відповідність між комплексними числами і відповідними радіус-векторами. За допомогою останнього зображення можна проілюструвати, що знаходження суми і різниці комплексних чисел — це просто знаходження суми і різниці відповідних векторів (рис. 174), оскільки при до-

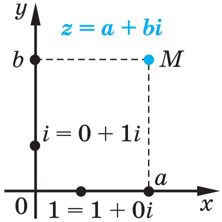


Рис. 172

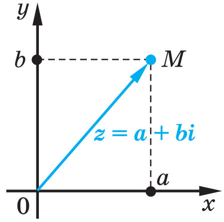


Рис. 173

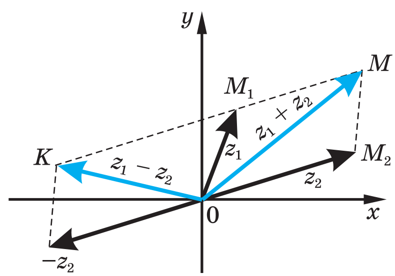


Рис. 174

даванні векторів відповідні координати додаються, а при відніманні — віднімаються (див. відповідні записи в таблиці 36).

З а у в а ж е н н я. Геометричне зображення дійсних чисел на числовій прямій дозволяє легко порівнювати дійсні числа: з двох чисел на числовій прямій більше те, яке зображено правіше (і менше те, яке зображено лівіше). Але для комплексних чисел, які зображаються точками на координатній площині, ми не можемо сказати, яка точка розміщена лівіше, а яка правіше (оскільки розглядається не одна, а дві координати). Тому для комплексних чисел не вводиться поняття «більше» чи «менше», тобто не можна, наприклад, сказати, яке з комплексних чисел більше: $3 + 2i$ чи $2 + 5i$.

Зазначимо, що введення комплексних чисел дозволяє розв'язувати *квадратні рівняння з від'ємним дискримінантом* (які в множині дійсних чисел не мали коренів). У множині комплексних чисел знак $\sqrt{}$ уже не є знаком тільки арифметичного квадратного кореня, тому, наприклад, $\sqrt{-1} = \pm i$ (оскільки $(\pm i)^2 = i^2 = -1$), $\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2i$, $\sqrt{-7} = \sqrt{7} \cdot \sqrt{-1} = \pm i\sqrt{7}$. (Як буде показано далі, корінь квадратний із комплексного числа має тільки два значення, тому інших значень записані квадратні корені не мають.) Враховуючи це, знайдемо корені квадратних рівнянь за допомогою відомих формул.

Приклад Розв'яжіть рівняння: 1) $x^2 - 2x + 5 = 0$, 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$.

▶ 1) $x^2 - 2x + 5 = 0$, тоді $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2i$. Отже,

$$x_1 = 1 + 2i,\ x_2 = 1 - 2i. \ \triangleleft$$

▶ 2) $x^2 - 3x + 4 = 0$, тоді $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-7}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Отже,

$$x_1 = \frac{3 + i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i, \quad x_2 = \frac{3 - i\sqrt{7}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i. \ \triangleleft$$

Запитання для контролю

1. Дайте означення комплексного числа. Наведіть приклади. Укажіть на цих прикладах дійсну та уявну частини комплексного числа.
2. Сформулюйте означення рівності двох комплексних чисел. У якому випадку будуть рівні комплексні числа $(m + 5i)$ та $(-3 + ni)$ при $m, n \in \boldsymbol{R}$?
3. 1) Наведіть приклади виконання операцій додавання, віднімання, множення і ділення над комплексними числами.
   2) Дайте означення суми, різниці, добутку і частки комплексних чисел.
4. 1) Поясніть, які комплексні числа називаються спряженими.
   2) Сформулюйте властивості спряжених комплексних чисел. Наведіть приклади.
   3) Доведіть властивості спряжених комплексних чисел.

5. **1) Сформулюйте основні властивості операцій додавання і множення в множині комплексних чисел.**
2) Обґрунтуйте справедливість цих властивостей.

6. **Поясніть на прикладах, як можна зображати комплексні числа на координатній площині: а) у вигляді точок, б) у вигляді радіус-векторів.**

Вправи

1. Назвіть дійсну і уявну частини комплексного числа:
1) $5 + 3i$; 2) $2 - 4i$; 3) $-5 + i$;
4) $-5 - 3i$; 5) $4i$; 6) 7.

2. Знаючи, що задані комплексні числа рівні, знайдіть значення x і y (при $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$):
1) $2x + 4i = 6 - yi$; 2) $8 + 4xi = y + 12i$;
3) $-4 + xi = 2y - 3i$; 4) $2xi = y + 2i$.

3. Знайдіть суму комплексних чисел:
1) $(5 + 2i) + (3 - 4i)$; 2) $(1 - 7i) + (-3 + 8i)$;
3) $(4 - i) + (-1 - 3i)$; 4) $(2 + 6i) + (2 - 6i)$.

4. Знайдіть різницю комплексних чисел:
1) $(9 - i) - (5 + 4i)$; 2) $(3 + 8i) - (1 - 11i)$;
3) $(-5 - 2i) - (6 + 3i)$; 4) $(4 + i) - (-2 - 3i)$.

5. Знайдіть добуток комплексних чисел:
1) $(2 + 5i) \cdot (4 - 2i)$; 2) $(5 - i) \cdot (-2 - 6i)$;
3) $(-4 + 6i) \cdot (3 + i)$; 4) $(7 - 4i) \cdot (7 + 4i)$.

6. Знайдіть частку комплексних чисел:
1) $\frac{18+i}{2+3i}$; 2) $\frac{6-4i}{1-i}$; 3) $\frac{11-10i}{4-3i}$; 4) $\frac{1}{1+i}$.

Спростіть вираз **(7–8)**.

7. 1) i^{41}; 2) $i^{27} + 2i^{13}$; 3) $3i^{24} + 2i^{14}$; 4) $i^{33} + i^{7}$.

8. 1) $(2 - 3i)^2$; 2) $(1 - i)^3$; 3) $(3 + 4i)^2$; 4) $(2 + i)^3$.

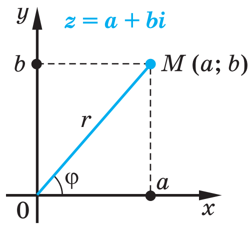
9. Зобразіть на координатній площині задане комплексне число:
а) у вигляді точки;
б) у вигляді радіус-вектора:
1) $z_1 = 2 + 3i$; 2) $z_2 = -1 - i$; 3) $z_3 = 3 - 2i$;
4) $z_4 = -2 - 4i$; 5) $z_5 = -3$; 6) $z_6 = 4i$.

10. Розв'яжіть рівняння:
1) $x^2 - 4x + 29 = 0$; 2) $2x^2 - 2x + 1 = 0$;
3) $x^2 + x + 2 = 0$; 4) $3x^2 + 5x + 3 = 0$.

22.2. Тригонометрична форма комплексного числа

Таблиця 38

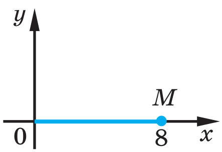
1. Поняття тригонометричної форми комплексного числа

Поняття	Ілюстрація, терміни і позначення
Комплексне число $z = a + bi$ зображається точкою M $(a; b)$. Положення цієї точки можна однозначно зафіксувати, задаючи довжину відрізка $OM = r$ і величину кута φ, який утворює промінь OM з додатним напрямком осі Ox. Тоді $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$. Звідси $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, тому $z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\,i$. Тоді **$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрична форма комплексного числа**	 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ — *модуль* (або *абсолютна величина*) комплексного числа $z = a + bi$. $\lvert z\rvert=r=\sqrt{a^2+b^2}$ φ — *аргумент* комплексного числа z (позначається $\operatorname{Arg} z$) **$\operatorname{Arg} z = \varphi$, де $\cos\varphi=\frac{a}{r}$, $\sin\varphi=\frac{b}{r}$.**

Приклади

1. Зобразимо комплексне число $8 = 8 + 0i$ на комплексній площині. З рисунка видно, що $\lvert 8\rvert = OM = 8$, $\operatorname{Arg} 8 = 0$, тобто в тригонометричній формі

$$8 = 8(\cos 0 + i\sin 0).$$



2. $z = 1 - i$, де $a = 1$, $b = -1$. Тоді

$$\lvert z\rvert=\lvert 1-i\rvert=r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}.$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi&=\frac{a}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\varphi&=\frac{b}{r}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}\right\}\ \operatorname{Arg} z=\varphi=\frac{7\pi}{4},$$

тобто в тригонометричній формі

$$1-i=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

2. Рівність комплексних чисел у тригонометричній формі

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$,
$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$,

$$\boxed{z_1 = z_2} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \text{ (або відрізняються на } 2\pi k\text{, де } k \in Z) \end{array}}$$

Два комплексних числа, заданих у тригонометричній формі, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, де $k \in Z$.

Продовж. табл. 38

<table>
<tr><td colspan="2">3. Дії над комплексними числами у триногометричній формі</td></tr>
<tr><td colspan="2">$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$,
$z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$</td></tr>
<tr><td>Множення</td><td>Ділення</td></tr>
<tr><td>$z_1 \cdot z_2 =$
$= r_1 \cdot r_2 (\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2))$

При множенні комплексних чисел їх модулі перемножуються, а аргументи додаються</td><td>$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2))$

При діленні комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються (модуль діленого ділиться на модуль дільника і від аргументу діленого віднімається аргумент дільника)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Піднесення до степеня</td></tr>
<tr><td>$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$
$\boxed{z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),\ n \in N}$
При піднесенні комплексного числа до натурального степеня модуль підноситься до цього степеня, а аргумент множиться на показник степеня. (Формулу можна використовувати і для цілих від’ємних n.)</td><td>Приклад
$(1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)\right)^{20} =$
$= (\sqrt{2})^{20}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right)\right) =$
$= 2^{10} (\cos 35\pi + i \sin 35\pi) =$
$= 1024 (-1 + i \cdot 0) = -1024$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Добування кореня n-го степеня</td></tr>
<tr><td>$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$
$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z}$
(Всього одержуємо n різних значень при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.)</td><td>При добуванні кореня n-го степеня з комплексного числа з модуля добувається арифметичний корінь n-го степеня, а до аргументу додається $2\pi k$ і результат ділиться на показник кореня</td></tr>
</table>

Продовж. табл. 38

<table>
<tr><td></td><td>Приклади</td></tr>
<tr><td>У множенні комплексних чисел знаки $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[2k]{\ }$ не є знаками лише арифметичних коренів, як це було в множині дійсних чисел. Тому знаком $\sqrt[n]{z}$ позначаються усі n значень кореня для будь-якого n (парного чи непарного).</td><td>1. $\sqrt{-1}=\pm i.$
2. $\sqrt{9}=\pm 3$ (лише в множині комплексних чисел!).
3. $t=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8(\cos 0+i\sin 0)}=$
$=\sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right)=2\left(\cos\frac{2\pi k}{3}+i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),\ k\in\boldsymbol{Z}$
(в останній рівності $\sqrt[3]{8}=2$ — арифметичний корінь).
Маємо три різних значення $\sqrt[3]{8}$:
1) при $k=0$ $t_0=\sqrt[3]{8}=2(\cos 0+i\sin 0)=2;$
2) при $k=1$
$t_1=\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3};$
3) при $k=2$
$t_2=\sqrt[3]{8}=2\left(\cos\frac{4\pi k}{3}+i\sin\frac{4\pi k}{3}\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1-i\sqrt{3},$
тобто $\sqrt[3]{8}$ має три значення: 2; $-1+i\sqrt{3}$; $-1-i\sqrt{3}$.</td></tr>
</table>

Пояснення й обґрунтування

1. Поняття тригонометричної форми комплексного числа. Як уже відмічалося, кожне комплексне число $z=a+bi$ можна зобразити на координатній (комплексній) площині у вигляді точки $M\,(a;\,b)$ або у вигляді вектора $\overline{OM}$ (з координатами $(a;\,b)$). Але положення точки M (вектора $\overline{OM}$) на координатній площині можна однозначно зафіксувати, задаючи довжину відрізка $OM=r$ і величину кута* φ, який утворює промінь OM з додатним напрямком осі Ox (рис. 174). Враховуючи формулу відстані між двома точками та означення косинуса і синуса на координатній площині, одержуємо:

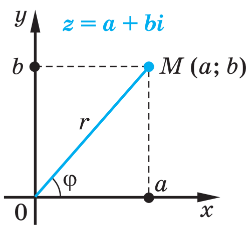


Рис. 174

$$r=OM=\sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi=\frac{a}{r},\ \sin\varphi=\frac{b}{r}.$$

Тоді $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$ і задане комплексне число z можна записати так: $z=a+bi=r\cos\varphi+(r\sin\varphi)\,i=$ $=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Одержаний запис комплексного числа z називається

* Величину кута будемо вимірювати в радіанах.

тригонометричною формою цього числа, а його запис у вигляді $a + bi$ — *алгебраїчною формою* комплексного числа. Отже,

тригонометричною формою комплексного числа $z = a + bi$ називається запис цього числа у вигляді:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \text{ де } r = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Невід'ємне число $r = \sqrt{a^2+b^2}$ називається *модулем* (або *абсолютною величиною*) комплексного числа $z = a + bi$) і позначається $|z|$. Отже,

$$|z| = r = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Як і для дійсних чисел на координатній (комплексній) площині, *модуль комплексного числа — це відстань від точки, що зображає задане число, до точки* 0 (до початку координат). Як і для дійсних чисел, тільки при $z = 0$ модуль z дорівнює нулю, а якщо $z \neq 0$, то $|z| > 0$. Зазначимо, що для дійсного числа $z = a = a + 0i$ його модуль $|z| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2} = |a|$ співпадає із звичайним модулем дійсного числа.

Число φ, яке входить до запису тригонометричної форми комплексного числа $z = a + bi$, називається *аргументом* комплексного числа і позначається $\operatorname{Arg} z$. Отже,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi, \text{ де } \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}\ \left(r = \sqrt{a^2+b^2}\right).$$

Як уже відмічалося, при геометричному зображенні комплексного числа $z = a + bi$ у вигляді точки $M(a; b)$ (чи радіус-вектора $\overline{OM}$) аргумент φ — це числове значення величини кута, який утворює промінь OM з додатним напрямком осі Ox (див. рис. 174). Зрозуміло, що цей кут можна визначити тільки з точністю до $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$. Тому аргумент комплексного числа z має нескінченну множину значень, які відрізняються одне від одного на число, кратне 2π. Зазначимо, що для комплексного числа $0 = 0 + 0i$ аргумент не можна визначити, оскільки $|0| = r = 0$ (у цьому випадку радіус-вектор $\overline{OM}$ перетворюється в точку — нуль-вектор — і ми не можемо вказати його напрям.

Приклад Запишіть у тригонометричній формі число $\sqrt{3} - i$.

▶ Якщо $z = a + bi = \sqrt{3} - i$, то $a = \sqrt{3}$, $b = -1$. Знайдемо модуль цього комплексного числа: $r = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2$. Аргумент φ знайдемо із співвідношень: $\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}$. Оскільки косинус φ додатний, а синус φ — від'ємний, то відповідний кут φ знаходиться в IV чверті і як одне із значень аргументу можна взяти $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (або будь-яке інше значення, яке відрізняється від нього на $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$, наприклад, $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$). Тоді задане комплексне число в тригонометричній формі запишеться так:

$$z = \sqrt{3} - i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right). \quad \triangleleft$$

У найпростіших випадках тригонометричну форму комплексного числа можна записувати, спираючись на зображення цього числа на координатній площині.

Наприклад, для числа $1 = 1 + 0i$, яке зображається точкою M (1; 0) (рис. 176), модуль $r = OM = 1$ і аргумент $\varphi = 0$ (кут між променем OM і додатним напрямом осі Ox дорівнює 0). Тоді в тригонометричній формі число 1 можна записати так: $1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$.

Аналогічно, для числа $i = 0 + 1i$, яке зображається точкою N (0; 1) (див. рис. 176), модуль $r = ON = 1$ і аргумент $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (кут між променем ON і додатним напрямом осі Ox дорівнює $\frac{\pi}{2}$), тоді в тригонометричній формі число i можна записати так: $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

Нагадаємо, що для дійсних чисел геометричний зміст виразу $|a - b|$ — *це відстань між відповідними точками на числовій прямій*, тобто $|a - b| = AB$ (рис. 177).

Аналогічно для комплексних чисел

геометричний зміст виразу $|z - w|$ — це відстань між відповідними точками на координатній (комплексній) площині.

Дійсно, комплексне число z зображається вектором $\overline{OM}$ або точкою M, а комплексне число w — вектором $\overline{ON}$ або точкою N (рис. 178). Тоді комплексне число $z - w$ зображається різницею цих векторів, тобто вектором $\overline{MN}$. Число $|z - w|$ дорівнює довжині цього вектора, тобто відстані між точками M і N. ○

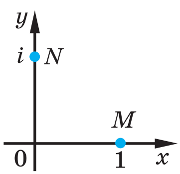


Рис. 176

Рис. 177

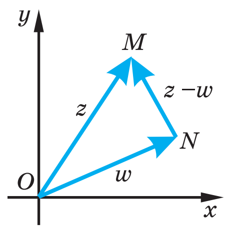


Рис. 178

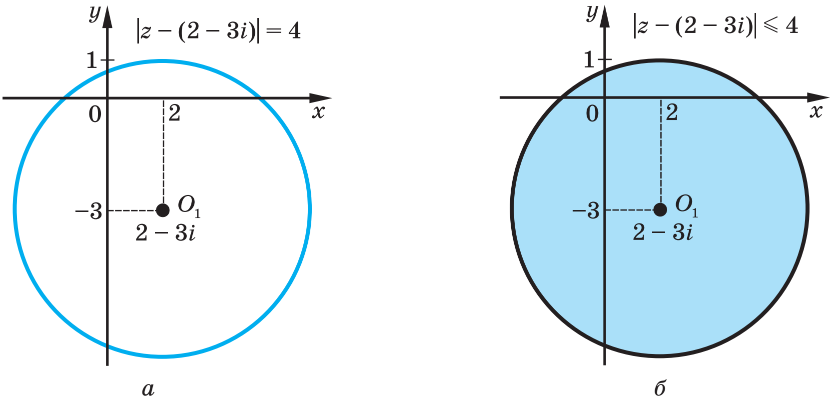


Рис. 179

Наприклад, нехай потрібно зобразити множину точок z комплексної площини, для яких виконується рівність

$$|z-2+3i|=4 \qquad (1)$$

або нерівність

$$|z-2+3i|\leqslant 4. \qquad (2)$$

Для цього досить записати задані умови так: $|z-(2-3i)|=4$; $|z-(2-3i)|\leqslant 4$ і використати геометричний зміст модуля різниці. Тоді множина точок, яка задається рівністю (1), — це коло радіуса 4 з центром у точці O_1 (2; −3) (рис. 179, *а*), а множина точок, яка задається нерівністю (2) — це круг радіуса 4 з центром у точці O_1 (2; −3) (рис. 179, *б*).

Зазначимо, що у випадку, коли два комплексних числа рівні, то вони зображаються однією і тією самою точкою M на координатній площині. Але тоді їх модулі (відстані до початку координат) рівні, а аргументи (тобто кути, утворені променем OM з додатнім напрямком осі Ox) або рівні, або відрізняються на ціле число повних обертів, тобто на $2\pi k$, де $k\in \boldsymbol{Z}$. І навпаки, якщо модулі двох комплексних чисел рівні, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, то ці числа зображаються на координатній площині однією і тією самою точкою, отже, ці числа рівні. Таким чином,

два комплексних числа, задані в тригонометричній формі, рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, де $k\in \boldsymbol{Z}$.

Тобто, якщо $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, то рівність $z_1=z_2$ виконується тоді і тільки тоді, коли $r_1=r_2$ і $\varphi_1=\varphi_2$ (або φ_2 відрізняється від φ_1 на $2\pi k$, тобто $\varphi_2=\varphi_1+2\pi k$, де $k\in \boldsymbol{Z}$).

2. Множення, піднесення до степеня і ділення комплексних чисел у тригонометричній формі.

Нехай задано два комплексних числа у тригонометричній формі:

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\qquad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тоді $z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$
$= r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)).$
Враховуючи, що $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 + \varphi_2),$
$\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$, одержуємо

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (3)$$

Тобто **при множенні комплексних чисел у тригонометричній формі їх модулі перемножуються, а аргументи додаються.**

Піднесення до натурального степеня комплексного числа **$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$** зводиться до множення однакових множників, тому, використовуючи декілька разів формулу (3), одержуємо

$$z^n = \underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ разів}} = \underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n\text{ разів}}\Big(\cos(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ разів}}) + i\sin(\underbrace{\varphi+\varphi+\ldots+\varphi}_{n\text{ разів}})\Big).$$

Таким чином,

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (4)$$

Тобто **при піднесенні комплексного числа до натурального степеня модуль підноситься до цього степеня, а аргумент множиться на показник степеня.**

Наприклад, для знаходження i^{102} врахуємо, що в тригонометричній формі $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ (с. 369). Тоді, використовуючи формулу (4), одержуємо

$$i^{102} = \left(1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^{102} = 1^{102}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 102\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 102\right)\right) =$$
$$= 1(\cos 51\pi + i\sin 51\pi) = 1\cdot(-1 + i\cdot 0) = -1$$

(що співпадає із значенням, одержаним на с. 360 в алгебраїчній формі).

Оскільки ділення — дія, обернена до множення, то при діленні числа **$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$** на число **$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$** (при $z_2 \neq 0$) модулі потрібно поділити, а аргументи — відняти:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (5)$$

Тобто **при діленні комплексних чисел їх модулі діляться, а аргументи віднімаються.**

За формулою (3) добуток числа $z_3 = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ на число $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ дорівнює:

$$z_3 z_2 = \frac{r_1}{r_2}\cdot r_2(\cos((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2) + i\sin((\varphi_1 - \varphi_2) + \varphi_2)) = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = z_1.$$

Це й означає, що число z_3 є часткою від ділення числа z_1 на число z_2.

Зауваження. Якщо $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то за означенням $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ (при $z \neq 0$). Оскільки $1 = 1 + 0i = 1(\cos 0 + i\sin 0)$, то, враховуючи рівності (4) і (5) для $n \in \boldsymbol{N}$, маємо:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1(\cos 0 + i\sin 0)}{r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)} = \frac{1}{r^n}(\cos(0 - n\varphi) + i\sin(0 - n\varphi)) =$$

$$= r^{-n}(\cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)).$$

Ця рівність означає, що формулою (4) можна користуватися не тільки для натуральних, а й для цілих значень n при $z \neq 0$ (нагадаємо, що $z^0 = 1$ при $z \neq 0$).

3. Добування кореня з комплексного числа. Як і для дійсних чисел, *коренем n-го степеня з комплексного числа z* (де n — натуральне число) *називається таке комплексне число t, що $t^n = z$.*

Корінь n-го степеня з z позначається $\sqrt[n]{z}$. Отже, якщо $t = \sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Покажемо, що з будь-якого комплексного числа z можна добути корінь n-го степеня, причому, якщо $z \neq 0$, то $\sqrt[n]{z}$ набуває n різних значень. Для обґрунтування використаємо тригонометричну форму розглянутих комплексних чисел.

Нехай $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Число t будемо шукати у вигляді

$$t = R(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Якщо $t = \sqrt[n]{z}$, то $z = t^n$. Враховуючи, що $t^n = R^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$, одержуємо

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = R^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha).$$

Але два комплексних числа в тригонометричній формі рівні тоді і тільки тоді, коли їх модулі рівні, а аргументи або рівні, або відрізняються на $2\pi k$, де $k \in \boldsymbol{Z}$. Отже,

$$R^n = r, \tag{6}$$

$$n\alpha = \varphi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{7}$$

Оскільки $r \geqslant 0$ і число R повинно бути невід'ємним, то з рівності (6) отримуємо

$$R = \sqrt[n]{r} \text{ (арифметичне значення),}$$

а з рівності (7)

$$\alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{8}$$

Таким чином,

$$\sqrt[n]{z} = t = R(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{9}$$

Враховуючи, що функції $\cos x$ і $\sin x$ є періодичними з найменшим додатним періодом 2π, робимо висновок, що значення $\sqrt[n]{z}$, які дає формула (9), можуть повторюватися тільки в тому випадку, коли значення α (див. формулу 8) будуть відрізнятися на число, кратне 2π. З'ясуємо, при яких значеннях k_1 і k_2 це може бути. Для цього різниця $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\varphi + 2\pi k_1}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k_2}{n} = \frac{2\pi(k_1 - k_2)}{n}$ повинна бути кратною 2π, а для цього різниця $k_1 - k_2$ повинно ділитися на n. Звідси випливає, що при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ формула (9) дає різні значення $\sqrt[n]{z}$. При $k = n$ одержуємо те саме значення кореня, що і при $k = 0$, при $k = n + 1$ одержуємо те ж саме значення кореня, що і при $k = 1$ і т. д. Отже, за формулою (9) ми завжди одержимо точно n різних значень $\sqrt[n]{z}$ (при $z \neq 0$). Тобто

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in \boldsymbol{Z}. \qquad (10)$$

(Усього одержуємо n різних значень при $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.) Тобто **при добуванні кореня *n*-го степеня з комплексного числа з модуля добувається арифметичний корінь *n*-го степеня, а до аргументу додається $2\pi k$ (де $k \in Z$) і результат ділиться на показник кореня.**

Приклад Знайдіть усі значення $\sqrt[4]{1}$.

Запишемо підкореневе число у тригонометричній формі $1 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0)$. Тоді за формулою (10):

$$t = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1\,(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{0 + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{0 + 2\pi k}{4}\right) = 1\left(\cos\frac{\pi k}{2} + i\sin\frac{\pi k}{2}\right).$$

Усього одержуємо 4 різних значення:

При $k = 0$ $\quad t_0 = 1\,(\cos 0 + i\sin 0) = 1\,(1 + i \cdot 0) = 1.$

При $k = 1$ $\quad t_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 1\,(0 + i \cdot 1) = i.$

При $k = 2$ $\quad t_2 = 1\,(\cos\pi + i\sin\pi) = 1\,(-1 + i \cdot 0) = -1.$

При $k = 3$* $\quad t_3 = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 1\,(0 + i \cdot (-1)) = -i.$

Отже, $\sqrt[4]{1}$ має чотири різних значення: $1; -1; i; -i$. ◁

Зауваження. Якщо записати формулу (10) так:

$$t_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k\right)\right),\ k \in \boldsymbol{Z}\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1),$$

то, враховуючи геометричний зміст модуля, одержуємо, що всі точки, які зображають числа t_k, лежать на колі радіуса $\sqrt[n]{r}$ з центром у початку коор-

* Як було обґрунтовано вище, якщо продовжувати підставляти інші цілі значення k, то знайдені значення будуть повторюватися: наприклад, при $k = 4$ одержуємо

$$t = 1\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1\,(1 + i \cdot 0) = 1 = t_0.$$

динат. Аргументи сусідніх точок відрізняються на $\frac{2\pi}{n}$, а тому вказані точки ділять коло на n рівних частин. Тобто ці точки є вершинами правильного n-кутника, вписаного в це коло. Наприклад, точки, які зображають усі значення $\sqrt[4]{1}$ (тобто ± 1 та $\pm i$) є вершинами правильного чотирикутника, вписаного в коло радіуса 1 з центром у початку координат (рис. 180).

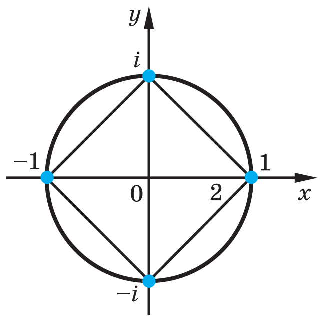


Рис. 180

Запитання для контролю

1. Користуючись геометричним зображенням комплексного числа, поясніть зміст понять модуль і аргумент комплексного числа.
2. Запишіть формули, за якими для комплексного числа $z = a + bi$ можна знайти його модуль і аргумент. Наведіть приклади.
3. Запишіть загальний вигляд комплексного числа в тригонометричній формі. Наведіть приклади запису комплексних чисел у тригонометричній формі.
4. Поясніть, у якому випадку будуть рівними комплексні числа
$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ і } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$
5. Поясніть і обґрунтуйте геометричний зміст модуля різниці двох комплексних чисел. Зобразіть множину точок z комплексної площини, для яких $|z - i| = 1$.
6. Поясніть, як виконуються дії множення, ділення і піднесення до степеня над комплексними числами в тригонометричній формі. Запишіть і доведіть відповідні формули.
7. Запишіть і доведіть формулу для добування кореня n-го степеня з комплексного числа в тригонометричній формі.

Вправи

1. Зобразіть на координатній площині задане комплексне число. Користуючись відповідним зображенням, знайдіть його модуль і аргумент та запишіть задане число в тригонометричній формі:

1) $3i$; 2) 4; 3) $-5i$; 4) -7.

2. Подайте в тригонометричній формі комплексне число:

1) $\sqrt{3}+i$; 2) $2 + 2i$; 3) $3i$; 4) $-3 - 3i$;

5) -4; 6) $-1-\sqrt{3}i$; 7) $-2+2\sqrt{3}i$.

3. Подайте в алгебраїчній формі число, яке задано в тригонометричній формі:

1) $4\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; 3) $2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

4. Зобразіть на комплексній площині множину точок z, які задовольняють умові:

1) $|z-2-i|=2$; 2) $|z+i|\geqslant 3$; 3) $|z+1-i|\leqslant 2$; 4) $|z-3|=4$.

5. Знайдіть добуток і частку комплексних чисел z_1 і z_2, заданих у тригонометричній формі (результат запишіть у тригонометричній і алгебраїчній формах):

1) $z_1=12\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

2) $z_1=6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

6. Обчисліть вираз, попередньо подавши чисельник і знаменник у тригонометричній формі:

1) $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$; 2) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}i}{i-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{1+i}{-1-i}$; 4) $\frac{-1+i}{\sqrt{3}-i}$.

7. Піднесіть комплексне число до степеня, попередньо подавши основу степеня в тригонометричній формі.

1) $(1+i)^{16}$; 2) $\left(-\sqrt{3}+i\right)^{15}$; 3) $\left(\sqrt{3}+i\right)^{12}$; 4) $(1-i)^{20}$.

8. Знайдіть всі значення кореня n-го степеня з комплексного числа:

1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt{-1+i\sqrt{3}}$; 3) $\sqrt[4]{-16}$; 4) $\sqrt[6]{-1}$.

9. Знайдіть всі комплексні корені рівняння:

1) $z^3-27=0$; 2) $z^4+81=0$; 3) $z^6+64=0$; 4) $z^4-625=0$.

ДОДАТКОВІ ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Скільки існує трицифрових чисел, що не містять у десятковому записі цифри 0?

2. Скільки існує парних чотирицифрових чисел, що не містять у десятковому записі цифри 0?

3. Скільки чотирицифрових чисел, кратних 5, усі цифри яких різні, можна записати, використовуючи лише цифри 5, 6, 7, 8 і 9?

4. Скільки парних чотирицифрових чисел, усі цифри яких різні, можна записати, використовуючи лише цифри 2, 3, 5, 7 і 8?

5. У класі, у якому 15 учнів, обирають старосту та його заступника. Скількома способами це можна зробити?

6. У класі, у якому 18 учнів, обирають трьох делегатів на шкільну конференцію. Скількома способами це можна зробити?

7. Скільки трицифрових чисел, кратних трьом, можна записати, використовуючи лише цифри 1, 2, 3, 4, 5 і 6?

8. Скількома способами можна 4 чорні і 8 білих кульок розташувати в ряд так, щоб жодні дві чорні кульки не опинилися поруч?

9. Математична енциклопедія містить 5 томів. Скількома способами їх можна розмістити на полиці так, щоб томи не були розміщені один за одним у порядку зростання їх номерів?

10. Учень має 6 різних підручників, по одному з кожного предмету. Скількома способами їх можна розмістити на полиці так, щоб підручники з фізики та хімії не стояли поруч?

11. Скільки існує п'ятицифрових натуральних чисел, які однаково читаються зліва направо і справа наліво?

12. У скількох точках перетинаються 11 прямих, якщо серед них лише дві паралельні, а жодні три з них не перетинаються в одній точці?

13. У скількох точках перетинаються 10 прямих, якщо серед них немає паралельних і жодні три з них не перетинаються в одній точці?

14. На шаховому турнірі зіграно 55 партій. При цьому кожен учасник зіграв з кожним із інших учасників одну партію. Скільки шахістів брало участь у турнірі?

15. У шаховому турнірі брало участь 10 гравців. При цьому кожен гравець зіграв з кожним із інших гравців одну партію. Скільки всього було зіграно партій у турнірі?

Розв'яжіть рівняння **(16–18)**.

16. 1) $C_{x-3}^{2}=21;$ 2) $C_{x+4}^{2}=x^{2}-1;$

3) $C_{x}^{3}+C_{x}^{2}=15(x-1);$ 4) $C_{x+1}^{x-1}+C_{x}^{x-2}=9x+10.$

17. 1) $\dfrac{P_{x+2}}{A_{x}^{n}P_{x-n}}=132;$ 2) $\dfrac{P_{x-n}A_{x+1}^{n+1}}{P_{x-1}}=90;$

3) $\dfrac{P_{x-4}A_{x}^{4}}{P_{x-2}}=42;$ 4) $\dfrac{P_{x-n}A_{x+2}^{n+2}}{P_{x}}=110.$

18. 1) $C_{x+1}^{5}=\dfrac{3}{8}\cdot A_{x}^{3};$ 2) $C_{4x+9}^{4(x+1)}=5A_{4x+7}^{3};$

3) $C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^{3};$ 4) $C_{x+1}^{x-4}=\dfrac{7}{15}\cdot A_{x+1}^{3}.$

19. У стандартному вигляді многочлена $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^{6}$ знайдіть доданок, що не містить змінної x.

20. У стандартному вигляді многочлена $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{5}$ знайдіть коефіцієнт при x.

21. У стандартному вигляді многочлена $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{14}$ знайдіть коефіцієнт при x^{2}.

22. У стандартному вигляді многочлена $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{a}\right)^5$ знайдіть доданок, що не містить змінної a.

23. Знайдіть середній член розкладу $\left(a^{-2}\sqrt[2]{a}-\sqrt[5]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{a}}}\right)^n$, коли відомо, що коефіцієнт п'ятого члена відноситься до коефіцієнта третього члена як 14 : 3.

24. Знайдіть той член розкладу бінома $\left(z\sqrt{z}+\frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^m$, який після спрощень містить z^5, якщо сума біноміальних коефіцієнтів цього розкладу дорівнює 128.

25. Визначіть x з умови, що п'ятий член розкладу бінома $\left(\sqrt{x}+x^{-1}\right)^6$ дорівнює $\frac{5}{9}$.

26. Визначіть z з умови, що різниця між п'ятим і третім членами розкладу бінома $\left(x+\sqrt{5}\right)^6$ дорівнює 300.

27. Визначіть x з умови, що третій член розкладу бінома $(x + x^{\lg x})^5$ дорівнює 1 000 000.

28. Знайдіть раціональні члени розкладу бінома:

1) $\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)^5$; 2) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{10}$; 3) $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{15}$; 4) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^8$.

29. Олег вже три місяці бере участь у щотижневій лотереї, але жодного разу не виграв. Однак він продовжує грати, стверджуючи: «Лотерея — випадкова гра, іноді виграєш, іноді програєш. Я вже довго не вигравав, тому упевнений, що обов'язково виграю в одному з наступних розіграшів». Чи згодні ви з міркуваннями Олега?

30. Учні провели експерименти по підкиданню монети. З 100 разів «герб» випав 46 разів, «число» — 54 рази. Учні засперечалися, що з більшою імовірністю з'явиться при наступному підкиданні: «герб» чи «число»? «Більш імовірна поява «герба», — сказав Єгор, — адже до цього експерименту він випадав рідше, ніж «число», виходить, тепер повинен випадати частіше». — «Імовірніше поява «числа», — сказав Віктор, — раз воно випадало частіше, то і буде випадати частіше». — «Поява «герба» і поява «числа» рівноімовірні, — сказала Наталка, — тому що результат кожного наступного випадкового експерименту не залежить від результатів попередніх експериментів». З ким би ви погодилися і чому?

31. За три роки (2003 — 2005) на річці було дві повені, остання з яких відбулася в 2005 році. З яким варіантом відповіді на запитання «Коли буде наступна повінь?» ви згодні і чому?

а) у 2006 році;
б) у 2007 році;
в) повеней не буде кілька років, тому що останнім часом їх уже було занадто багато;
г) не вистачає даних, щоб відповісти на запитання.

32. У багатьох книгах зустрічається відомий анекдот:

— Докторе, — запитує пацієнт, — чи є у мене надія на одужання?

— Безсумнівно, — відповідає лікар. — Статистика говорить, що один пацієнт із ста одужує при цій хворобі.

— Але чому ж саме я повинен одужати?

— Тому що саме ви і є мій сотий хворий!

Чи вірно міркує лікар і які, на вашу думку, шанси хворого на одужання?

33. У лотереї бере участь понад 10 тисяч чоловік. Відомо, що на кожні 100 квитків припадає один виграшний. Сергій купив 100 квитків і упевнений, що серед них напевно буде хоча б один виграшний. Чи згодні ви з його думкою?
Які з наступних подій у цій ситуації є можливими? вірогідними? неможливими?
Серед куплених квитків:
а) немає жодного виграшного;
б) є тільки один виграшний;
в) є три виграшних;
г) є 53 виграшних.

34. В ящику є 14 червоних і 6 чорних кульок. Яка імовірність того, що навмання витягнута кулька буде червоною?

35. Із слова «математика» навмання вибирають одну літеру. Яка імовірність того, що виберуть літеру «а»?

36. Підкидають три гральних кубики. Знайдіть імовірність того, що добуток чисел, які випадуть, буде парним числом.

37. Підкидають два гральних кубики. Знайдіть імовірність того, що добуток чисел, які випадуть, буде парним числом.

38. Набираючи номер по телефону, абонент забув останні дві цифри і набрав їх навмання, пам'ятаючи лише те, що ці цифри парні і різні. Знайдіть імовірність того, що номер телефону набрано правильно.

39. В ящику 6 білих, 1 червона і 3 чорних кульки. Яка імовірність того, що навмання витягнуті дві кульки будуть різного кольору?

40. Імовірність того, що Оленка розв'яже задачу, дорівнює 0,8; а імовірність того, що Остап розв'яже задачу, — 0,7. Знайдіть імовірність того, що задачу не розв'яже жоден із них.

41. Два стрільці стріляють в одну мішень. Імовірність попадання в мішень першим стрільцем — 0,6; а другим — 0,9. Знайдіть імовірність того, що в мішень попаде лише один з них.

42. Учень написав чотири вітальні листівки і навмання вклав їх у чотири заадресованих конверти. Знайдіть імовірність того, що лише два адресати отримають свої вітання.

43. Учень написав чотири вітальні листівки і навмання вклав їх у чотири заадресованих конверти. Знайдіть імовірність того, жоден адресат не отримає свого вітання.

44. Для класу, у якому є 16 учнів, виділено путівки для відпочинку: 6 — у Криму, 6 — у Карпатах і 4 — у Шацьку. Знайдіть імовірність того, що двоє друзів відпочиватимуть разом.

ВІДОМОСТІ З ІСТОРІЇ *

Елементарні задачі, які пізніше були віднесені до стохастики, тобто до комбінаторики, теорії імовірностей та математичної статистики, ставилися і розв'язувалися ще в часи Стародавніх Єгипту, Греції та Риму. Цей період так званої передісторії теорії імовірностей закінчується в XVI ст. працями італійських математиків Д. Кардано (1501–1576) «Книга про гру в кості», Н. Тарталья (1499–1557) «Загальний трактат про число та міру», Г. Галілея (1564–1642) «Про випадання очок при грі у кості» та ін. У цих працях вже фігурує поняття імовірності, використовується теорема про імовірність добутку незалежних подій, висловлюються деякі міркування щодо так званого закону великих чисел.

У середині XVII ст. питаннями теорії імовірностей зацікавилися видатні вчені, зокрема французькі математики П. Ферма (1601–1665) і Б. Паскаль (1623–1662) та нідерландський математик Х. Гюйгенс (1629–1695). У своїх працях вони вже використовували теореми додавання і множення імовірностей, поняття залежних та незалежних подій, математичного сподівання. Х. Гюйгенс видав у 1657 р. перший трактат з теорії імовірностей «Про розрахунки в азартних іграх».

Наступні кроки в розвитку теорії імовірностей та математичної статистики пов'язані з іменами голландського математика Я. де Вітта (1625–1672) і англійського математика Е. Галлея (1656–1742), які займалися питаннями страхування і склали перші таблиці смертності відповідно у 1671 р. та 1693 р.

Одними з перших дослідників у теорії імовірностей та математичної статистики були швейцарські математики Я. Бернуллі (1654–1705), Н. Бернуллі (1687–1759), Д. Бернуллі (1700–1782) та російський математик Л. Ейлер (1707–1783).

---

* Відомості подаються за посібником: Жалдак М. І., Михалін Г. О. Елементи стохастики з комп'ютерною підтримкою: Посібник для вчителів.— К.: РННЦ «ДІНІТ», 2004.— 107 с.

Я. Бернуллі написав книгу «Мистецтво припущень», де, зокрема, наводить так званий біноміальний розподіл імовірностей та закон великих чисел.

Н. Бернуллі своєю працею «Досвід застосування мистецтва припущень до правових питань» (1711 р.) продовжив працю Я. Бернуллі. Він застосував імовірнісні ідеї та методи до оцінки показань свідків, підрахунку рент, страхування життя та товарів.

Д. Бернуллі першим висунув ідею застосування нескінченно малих величин до задач теорії імовірностей. Головна його робота в галузі теорії імовірностей — «Досвід дослідження застосування числення нескінченно малих у мистецтві припущень».

Л. Ейлер зробив видатний вклад у застосування теорії імовірностей у демографії. Він фактично започаткував основи сучасної демографії.

Серед перших книг з теорії імовірностей варто відмітити «Вчення про випадок», написану в 1716 р. французьким математиком А. де Муавром (1667–1754). У 1733 р. Муавр знайшов функцію нормального розподілу як наближення біноміального розподілу.

Англійським математиком Б. Байєсом (1702–1761) написана праця «Досвід розв'язування однієї задачі вчення про випадок», яка була видана в 1763–1764 рр. У ній, зокрема, наведено частинний випадок формули, яка пізніше була названа його іменем. У 1777 р. французький математик Ж. де Бюффон (1707–1788) навів перший приклад геометричної імовірності.

Значний вклад у розвиток теорії імовірностей належить французьким математикам П. Лапласу (1749–1827) та С. Пуассону (1781–1840).

Лаплас видав у 1812 р. монументальне дослідження «Аналітична теорія імовірностей», а у 1814 р. — популярну книгу «Філософський дослід відносно імовірностей». У своїх працях він докладно розглянув азартні ігри, геометричну ймовірність, теорему Бернуллі та її зв'язок із нормальним розподілом імовірностей, теорію найменших квадратів тощо. Слід підкреслити, що тільки після праць Лапласа стало можливим широке застосування науково обґрунтованих методів у теорії імовірностей. Більше того, багато пізніших результатів, нібито відкритих іншими математиками, можна знайти в працях Лапласа.

Головною працею Пуассона в галузі теорії імовірностей є «Дослідження імовірностей судових вироків у кримінальних та цивільних справах», у якій міститься, зокрема, і його теорема, пов'язана із законом розподілу Пуассона.

Велику роль у розповсюдженні ідей теорії імовірностей та математичної статистики в Росії та Україні відіграли видатні російські математики українського походження В. Я. Буняковський (1804–1889) та М. В. Остроградський (1801–1862).

Як вважав відомий російський математик Б. В. Гнеденко (1911–1995), захоплення теорією імовірностей у першій чверті XIX ст. привело до величезної кількості праць, пов'язаних із застосуванням цієї теорії до різних проблем природничих наук та суспільного життя. Багато з цих застосувань були мало обґрунтованими і сприймалися математиками як «математичні скандали». Тому це захоплення змінилося глибоким розчаруванням і повним скептицизмом щодо застосувань теорії імовірностей до наукового пізнання світу. Подальший розвиток теорії імовірностей потребував уточнення основних її положень. Потрібно було встановити предмет теорії імовірностей, область її застосувань, вивчити та підсилити її специфічні методи досліджень. Велику роботу в цьому напрямку провів видатний російський математик П. Л. Чебишов (1821–1894). П. Л. Чебишов залишив помітний вклад у багатьох розділах математики, зокрема, і в теорії імовірностей, де він узагальнив закон великих чисел, довів так звану центральну граничну теорему для суми незалежних випадкових величин та отримав багато інших результатів. Його курс теорії імовірностей, який він читав у Петербурзькому університеті, відрізняється чіткістю формулювань та обґрунтованістю доведень тверджень.

На думку видатного російського математика А. М. Колмогорова (1903–1987), завдяки П. Л. Чебишову була створена російська математична школа, яка стала найкращою у світі в багатьох розділах математики, зокрема й у теорії імовірностей.

Серед найвідоміших математиків, які були учнями П. Л. Чебишова, слід назвати А. А. Маркова (1857–1918) та О. М. Ляпунова (1857–1918), які стали видатними математиками саме завдяки своїм дослідженням у теорії імовірностей.

Книга А. А. Маркова «Числення імовірностей», перше видання якої відбулося в 1900 р., а четверте — у 1924 р., на протязі багатьох років була найкращою серед тих, за якими навчалися російські математики. У цій книзі, зокрема, розкривається, у якому розумінні *статистична імовірність* $P^*(A)$ *близька до імовірності* $P(A)$ *при великих* n: *імовірність значного відхилення* $P_n^*(A)$ *від* $P(A)$ *є близькою до нуля, проте це не означає, що значні відхилення неможливі при великих* n.

Величезні досягнення у теорії імовірностей майже не застосовувалися в математичній статистиці наприкінці XIX ст. Це, зокрема, видно з важливих праць бельгійського математика А. Кетле (1796–1874) та англійських математиків Ф. Гальтона (1822–1911) і К. Пірсона (1857–1936). Ця недоречність була усунута на початку XX ст. Зокрема, значну роль відіграли представники англо-американської школи У. Госсет (Стьюдент) (1876–1937), Е. Пірсон (1895–1980) і Е. Нейман (1894–1981), завдяки працям яких була створена теорія статистичної перевірки гіпотез.

Наприкінці XIX ст. французький математик Ж. Бертран (1822–1900) навів ряд парадоксів, пов'язаних із теорією імовірностей, а видатний французький математик А. Пуанкаре (1854–1912) узагальнив ці парадокси, які підкреслювали нечіткість та неточність деяких означень понять теорії імовірностей, а отже, поставала необхідність відповідних уточнень. Зробити це стало можливим завдяки аксіоматичному методу, який на початку XX ст. пронизує багато галузей математики.

У XX ст. теорія імовірностей поступово теж перетворюється на строгу аксіоматичну теорію. Це відбулося завдяки працям багатьох математиків. Так, англійський математик Р. Фішер (1890–1962) розвинув статистичний або емпіричний підхід до формування поняття імовірності. Німецький математик Р. Мізес (1883–1953) ввів поняття простору елементарних подій. Російський математик С. Н. Бернштейн (1880–1968) у 1917 р. надрукував роботу «Досвід аксіоматичного обґрунтування теорії імовірностей», а в 1927 р. видав книгу «Теорія імовірностей», у якій виклав власну аксіоматичну теорію імовірностей. Ця книга вважається однією з найкращих серед творів світової літератури з теорії імовірностей.

Але дійсно вирішальним етапом розвитку теорії імовірностей стала праця А. М. Колмогорова (1903–1987) «Основні поняття теорії імовірностей» (видана в 1937 р.), у якій він виклав свою аксіоматику теорії імовірностей і після якої теорія імовірностей зайняла рівноправне місце серед інших математичних дисциплін.

Великі досягнення в теорії імовірностей та математичній статистиці мали також російські математики О. Я. Хінчин (1894–1959), Є. Є. Слуцький (1880–1948), Б. В. Гнєденко (1911–1995) і багато інших, українські математики Й. І. Гіхман (1918–1985), В. С. Михалевич (1930–1994), М. Й. Ядренко (1932–2004), Ю. М. Єрмольєв (1936 р. н.), І. М. Коваленко (1935 р. н.), В. С. Королюк (1925 р. н.), А. В. Скороход (1930 р. н.), А. Ф. Турбін (1940 р. н.) та інші.

ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ

Таблиця 1

Розклад алгебраїчних виразів на множники

1. Формули скороченого множення	
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
2. Основні прийоми розкладання многочлена на множники	
Винесення спільного множника за дужки	$8a^3 + 10a^2b^3 - 6ab = 2a(4a^2 + 5ab^3 - 3b)$
Способ групування	$xy + 3yz - x^2 - 3xz =$ $= y(x+3z) - x(x+3z) =$ $= (x+3z)(y-x)$
Використання формул скороченого множення	$a^4 - 64 = (a^2)^2 - 8^2 = (a^2-8)(a^2+8)$
3. Розклад на множники квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$	
$ax^2 + bc + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена, тобто корені рівняння $ax^2 + bc + c = 0$	Оскільки $2x^2 + 3x - 5 = 0$ при $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{5}{2}$, то $2x^2 + 3x - 5 = 2(x-1)\left(x + \frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$
4. Узагальнення деяких формул скороченого множення	
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Приклади. $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ $a^5 - b^5 = (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ При $b = 1$ $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + a^{n-3} + \ldots + a^2 + a + 1)$	
Для **непарних** натуральних n $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$	
Приклади. $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ При $b = 1$ (и $n = 2k+1$) $a^{2k+1} + 1 = (a+1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - \ldots + a^2 - a + 1)$	

Таблиця 2

Властивості кореня *n*-го степеня

Основні формули для кореня n-го степеня (тільки для невід'ємних значень a і b, тобто $\begin{cases} a \geqslant 0, \\ b \geqslant 0 \end{cases}$)	Чи можна користуватися основними формулами для будь-яких a і b з ОДЗ лівої частини формули (якщо ні — дається узагальнена формула): корінь непарного степеня	корінь парного степеня
1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$	*можна*	*тільки для невід'ємних a*
2. $\sqrt[n]{a^n} = a$	*можна*	$\sqrt[2k]{a^{2k}} = \lvert a \rvert$
3. Корінь з кореня $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$	*можна*	*можна*
4. Корінь з добутку $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$	*можна*	$\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{\lvert a \rvert}\,\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}$
і добуток коренів $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$		*можна*
5. Корінь з частки $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$	*можна*	$\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[2k]{\lvert a \rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b \rvert}}$
і частка коренів $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$		*можна*
6. Основна властивість кореня: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ і навпаки	*можна*, якщо всі корені непарного степеня (тобто перехід *непарний → непарний*)	Перехід *парний → парний* *можна* Перехід *непарний → парний* $\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}} & \textbf{при } a^m \geqslant 0, \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}} & \textbf{при } a^m < 0 \end{cases}$
$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$		$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{\lvert a^m \rvert}$
7. Винесення множника з-під знака кореня $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	*можна*	$\sqrt[n]{a^n b} = \lvert a \rvert \sqrt[n]{b}$
8. Внесення множника під знак кореня $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	*можна*	$a\sqrt[n]{b} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n b}, & \textbf{при } a \geqslant 0, \\ -\sqrt[n]{a^n b}, & \textbf{при } a < 0, \end{cases}$ де $b \geqslant 0$

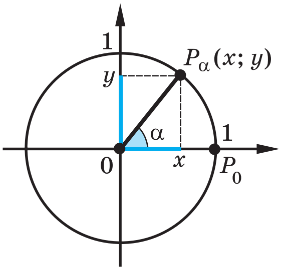
Властивості логарифмів

1. Логарифм числа	
Означення	**Приклади**
Логарифмом додатного числа b за основою a $(a > 0,\ a \neq 1)$ **називається показник степеня, до якого треба піднести a, щоб одержати b.**	1) $\log_4 16 = 2$, оскільки $4^2 = 16$; 2) $\log_7 \sqrt{7} = \frac{1}{2}$, оскільки $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$; 3) $\lg 1000 = 3$, оскільки $10^3 = 1000$.
2. Основна логарифмічна тотожність	
$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$	1) $3^{\log_3 5} = 5$; 2) $10^{\lg 2} = 2$.
3. Властивості логарифмів і формули логарифмування $(a > 0,\ a \neq 1)$	
1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$	2) $\boxed{\log_a a = 1}$
При $x > 0,\ y > 0$	**Узагальнення**
3) $\boxed{\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y}$	При $xy > 0$ $\boxed{\log_a (xy) = \log_a \lvert x \rvert + \log_a \lvert y \rvert}$
4) $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y}$	При $\frac{x}{y} > 0$ $\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a \lvert x \rvert - \log_a \lvert y \rvert}$
5) $\boxed{\log_a x^n = n \log_a x}$	При $x \neq 0$ $\boxed{\log_a x^{2k} = 2k \log_a \lvert x \rvert}$
4. Формула переходу до логарифмів з іншою основою	
$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$	$a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1,\ x > 0$
Наслідки	
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$	$\log_a b = \log_{a^k} b^k$

Тригонометричні формули

1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$x^2 + y^2 = 1$



$\cos\alpha = x$

$\sin\alpha = y$

Основна тригонометрична тотожність

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

2. Тригонометричні функції подвійного аргументу

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

3. Значення тригонометричних функцій деяких аргументів

α									
α	градуси	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	радіани	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α		0				1	0	–1	0
cos α		1				0	–1	0	1
tg α		0		1		не існує	0	не існує	0
ctg α		не існує		1		0	не існує	0	не існує

4. Косинус різниці і суми	
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$	
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$	
5. Синус суми і різниці	
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$	
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$	
6. Тангенс суми і різниці	
$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$	$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$
7. Формули суми і різниці тригонометричних функцій	
$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$
$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$	$\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
8. Перетворення добутку тригонометричних функцій у суму	
$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$ $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$	
9. Формула перетворення виразу $a\sin\alpha+b\cos\alpha$	
$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$, де аргумент φ визначається із співвідношень $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	

Продовж. табл. 4

10. Розв'язування рівнянь $\sin x = a$ і $\cos x = a$

$\sin x = a$	$\cos x = a$
$\lvert a \rvert > 1$: **Коренів немає**	$\lvert a \rvert > 1$: **Коренів немає**
$\lvert a \rvert \leqslant 1$: $\boldsymbol{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z}$	$\lvert a \rvert \leqslant 1$: $\boldsymbol{x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z}$

Окремі випадки

$\sin x = 0 \quad x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$\cos x = 1 \quad x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$
$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$	$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$

11. Розв'язування рівнянь $\operatorname{tg} x = a$ і $\operatorname{ctg} x = a$

$\boldsymbol{\operatorname{tg} x = a}$ $\boldsymbol{x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in Z}$	$\boldsymbol{\operatorname{ctg} x = a}$ $\boldsymbol{x = \operatorname{arcctg} a + \pi n,\ n \in Z}$
Окремий випадок $\operatorname{tg} x = 0$ $x = \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$	Окремий випадок $\operatorname{ctg} x = 0$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$

12. Схема розв'язування більш складних тригонометричних рівнянь

1. *Пробуємо звести всі тригонометричні функції* ***до одного аргументу.***
2. *Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази звести* ***до однієї функції.***
3. *Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо звести рівняння* ***до однорідного.***
4. *В інших випадках переносимо* ***всі члени в один бік і*** *пробуємо* ***одержати добуток*** *або використовуємо* ***спеціальні прийоми розв'язування.***

1. Рівняння і нерівності

Таблиця 5

<table>
<tr><td colspan="2">1. Область допустимих значень (ОДЗ)</td></tr>
<tr><td>Областю допустимих значень (або областю визначення) рівняння (або нерівності) називається спільна область визначення для функцій, що стоять у лівій і правій частинах рівняння (чи нерівності).</td><td>Для рівняння $\sqrt{x+2}=x$ ОДЗ: $x+2\geqslant 0$, тобто $x\geqslant -2$, оскільки область визначення функції $f(x)=\sqrt{x+2}$ визначається умовою $x+2\geqslant 0$, а областю визначення функції $g(x)=x$ є множина всіх дійсних чисел.</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Рівняння-наслідки</td></tr>
<tr><td>Якщо кожен корінь першого рівняння є коренем другого рівняння, то друге рівняння називається наслідком першого.
Якщо з правильності першої рівності випливає правильність кожної наступної, то одержуємо рівняння-наслідок.
При цьому можлива поява сторонніх коренів. Тому при використанні рівнянь-наслідків перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.</td><td>$\sqrt{x+2}=x$.
▶ Піднесемо обидві частини рівняння до квадрата:
$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=x^2$, $x+2=x^2$,
$x^2-x-2=0$,
$x_1=2$, $x_2=-1$.
Перевірка.
$x=2$ — корінь;
$x=-1$ — сторонній корінь.
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Рівносильні рівняння і нерівності</td></tr>
<tr><td>Означення</td><td>Найпростіші теореми</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Два рівняння (нерівності) називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають одні й ті самі розв'язки.
Тобто кожен розв'язок першого рівняння (нерівності) є розв'язком другого і, навпаки, кожен розв'язок другого є розв'язком першого (схеми такого розв'язування рівнянь і нерівностей наведено в пунктах 4 і 6 цієї таблиці).</td><td>1. Якщо з однієї частини рівняння (нерівності) перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то одержимо рівняння (нерівність), рівносильне заданому (на будь-якій множині).</td></tr>
<tr><td>2. Якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме число, яке не дорівнює нулю (або на одну й ту саму функцію, що визначена і не дорівнює нулю на ОДЗ заданого рівняння), то одержимо рівняння, рівносильне заданому (на ОДЗ заданого).</td></tr>
</table>

4. Схема пошуку плану розв'язування рівнянь

Розв'язування рівнянь

за допомогою рівнянь-наслідків

① ↓ ② Перетворення, що гарантують збереження правильної рівності

Перевірка коренів підстановкою в початкове рівняння

за допомогою рівносильних перетворень

Врахувати ОДЗ початкового рівняння

① ↑↓ ② Зберігати на ОДЗ правильну рівність при прямих і зворотних перетвореннях

застосуванням властивостей функцій *

① — початкове рівняння;

② — рівняння, одержане в результаті перетворення початкового;

↓, ↑ — символічне зображення напрямку виконаних перетворень

5. Заміна змінних

Орієнтир	Приклад
Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).	$\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0.$ ▶ *Заміна:* $\sin x = t.$ $t^2 - 2t - 3 = 0,$ $t_1 = 3,\ t_2 = -1.$ 1. При $t = 3$ маємо $\sin x = 3$ — коренів немає, оскільки $\lvert 3 \rvert > 1.$ 2. При $t = -1$ маємо $\sin x = -1$, тоді $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$ *Відповідь:* $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z.$ ◁

* Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь розглядається у § 11.

6. Схема пошуку плану розв'язування нерівностей

Розв'язування нерівностей

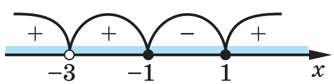
за допомогою **рівносильних перетворень**	**за допомогою** **методу інтервалів ($f(x) \gtrless 0$)**
Врахувати ОДЗ початкової нерівності 1 ↓↑ 2 Зберігати на ОДЗ правильну нерівність при прямих і зворотних перетвореннях	1. Знайти ОДЗ. 2. Знайти нулі функції: $f(x) = 0$. 3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак функції $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ. 4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.

1 — початкова нерівність;

2 — нерівність, одержана в результаті перетворення початкової;

↓, ↑ — символічне зображення виконаних перетворень (із вказівкою напрямку їх виконання)

7. Метод інтервалів (розв'язування нерівностей виду $f(x) \gtrless 0$)

План	Приклад
1. Знайти ОДЗ. **2. Знайти нулі функції $f(x) = 0$.** **3. Позначити нулі на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному проміжку, на які розбивається ОДЗ.** **4. Записати відповідь, враховуючи знак заданої нерівності.**	Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} \geqslant 0$. ▶ Нехай $f(x) = \frac{x^2-1}{(x+3)^2}$. 1. ОДЗ: $(x+3)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -3$. 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $\frac{x^2-1}{(x+3)^2} = 0$, $x^2 - 1 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ (входять до ОДЗ). 3.  *Відповідь:* $(-\infty; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; +\infty)$. ◁

Продовж. табл. 5

8. Теореми про рівносильність нерівностей
1. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме додатне число *(або на одну й ту саму функцію, що визначена і додатна на ОДЗ заданої нерівності)*, **не змінюючи знак нерівності, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**
2. Якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число *(або на одну й ту саму функцію, що визначена і від'ємна на ОДЗ заданої нерівності)* **і змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо нерівність, рівносильну заданій (на ОДЗ заданої).**

2. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ З МОДУЛЯМИ

Таблиця 6

1. Розв'язування рівнянь та нерівностей з модулями

за означенням

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a > 0, \\ 0, \text{ якщо } a = 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

за геометричним змістом

$|a|$ — *відстань на числовій прямій від точки* 0 *до точки* a.

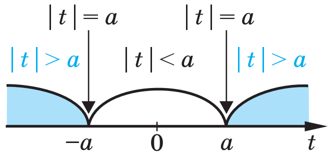
1. $|f(x)| = a$.
2. $|f(x)| = |g(x)|$.
3. $|f(x)| > a$.
4. $|f(x)| < a$.

за загальною схемою

1. **Знайти ОДЗ.**
2. **Знайти нулі всіх підмодульних функцій.**
3. **Позначити нулі на ОДЗ і розбити ОДЗ на проміжки.**
4. **Знайти розв'язок у кожному з проміжків (і перевірити, чи входить цей розв'язок у розглянутий проміжок).**

з використанням спеціальних співвідношень

2. Використання геометричного змісту модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow f(x) = a$ **або** $f(x) = -a$.
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **або** $f(x) = -g(x)$.
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow f(x) < -a$ **або** $f(x) > a$.
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a, \\ f(x) < a. \end{cases}$

Узагальнення

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x). \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) < -g(x)$ **або** $f(x) > g(x)$.
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x), \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

3. Використання спеціальних співвідношень

1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$.
2. $|u| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$.
3. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2$.
4. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2$. **Тоді** $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$; *знак різниці модулів двох виразів збігається із знаком різниці їх квадратів.*
5. $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0, \\ v \geqslant 0. \end{cases}$
6. $|u| + |v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0, \\ v \leqslant 0. \end{cases}$
7. $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geqslant 0$.
8. $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leqslant 0$.
9. $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, **де** $a < b$.

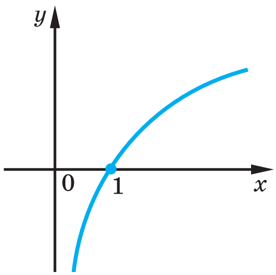
Т а б л и ц я 7

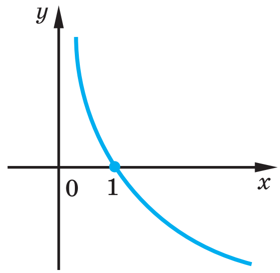
Розв'язування логарифмічних рівнянь

<table>
<tr><td colspan="2">1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо a — число ($a > 0$ і $a \neq 1$), то
$\boxed{\log_a f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = a^c}$
(використовуємо означення логарифма)</td><td>▶ $\log_3(x-1) = 2.$
$x - 1 = 3^2,$
$x = 10.$
Відповідь: 10. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Використання рівнянь-наслідків</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо з припущення, що перша рівність правильна, випливає правильність кожної наступної, то гарантуємо, що одержуємо рівняння-наслідок. При використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування.</td><td>$\log_x(x+2) = 2.$
▶ За означенням логарифма одержуємо
$x + 2 = x^2,$
$x^2 - x - 2 = 0,$
$x_1 = -1,\ x_2 = 2.$
П е р е в і р к а. $x = -1$ — сторонній корінь (в основі логарифма одержуємо від'ємне число);
$x = 2$ — корінь ($\log_2(2+2) = 2,$
$\log_2 4 = 2,\ 2 = 2$).
Відповідь: 2. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь</td></tr>
<tr><td colspan="2">Заміна змінних</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>Якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).</td><td>$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0.$
▶ Заміна: $\lg x = t,$
$t^2 - 2t - 3 = 0,$
$t_1 = -1,\ t_2 = 3.$
Отже,
$\lg x = -1$ або $\lg x = 3.$
Тоді $x = 10^{-1} = 0{,}1$ або
$x = 10^3 = 1000.$
Відповідь: 0,1; 1000. ◁</td></tr>
</table>

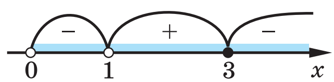
<table>
<tr><td colspan="2">Рівняння виду $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0$ і $a \neq 1$)</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{ ОДЗ}$$
(враховуємо ОДЗ і прирівнюємо вирази, які стоять під знаками логарифмів)</td><td>$\log_3(x^2 - 2) = \log_3(4x - 5)$.
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - 2 > 0, \\ 4x - 5 > 0. \end{cases}$
На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:
$x^2 - 2 = 4x - 5$, $x^2 - 4x + 3 = 0$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 3$,
$x = 1$ — сторонній корінь (не задовольняє умовам ОДЗ);
$x = 3$ — корінь (задовольняє умовам ОДЗ).
Відповідь: 3. ◁</td></tr>
<tr><td colspan="2">Рівносильні перетворення рівнянь в інших випадках</td></tr>
<tr><td>Орієнтир</td><td>Приклад</td></tr>
<tr><td>1. Враховуємо ОДЗ заданого рівняння (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ).
2. Стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної рівності.</td><td>$\log_2(x + 1) = 3 - \log_2(x + 3)$.
▶ ОДЗ: $\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0. \end{cases}$
На цій ОДЗ задане рівняння рівносильне рівнянням:
$\log_2(x + 1) + \log_2(x + 3) = 3$,
$\log_2((x + 1)(x + 3)) = 3$,
$(x + 1)(x + 3) = 2^3$,
$x^2 + 4x - 5 = 0$,
$x_1 = 1$, $x_2 = -5$.
$x = 1$ — корінь (задовольняє умовам ОДЗ);
$x = -5$ — сторонній корінь (не задовольняє умовам ОДЗ).
Відповідь: 1. ◁</td></tr>
</table>

Розв'язування логарифмічних нерівностей

<table>
<tr><td colspan="2">1. Графік функції $y = \log_a x \ (a > 0;\ a \neq 1)$</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>

зростає</td><td>

спадає</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Рівносильні перетворення найпростіших логарифмічних нерівностей</td></tr>
<tr><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td>$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) > 0. \end{cases}$$ Знак нерівності не змінюється, і враховується ОДЗ.</td><td>$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$ $$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0. \end{cases}$$ Знак нерівності змінюється, і враховується ОДЗ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Приклади</td></tr>
<tr><td>$\log_2(x-5) > 3.$
▶ ОДЗ: $x - 5 > 0$, тобто $x > 5$.
$\log_2(x-5) > \log_2 2^3.$
Функція $y = \log_2 t$ є зростаючою, отже,
$x - 5 > 2^3,$
$x > 13.$
Враховуючи ОДЗ, маємо $x > 13$.
Відповідь: $(13;\ +\infty)$. ◁</td><td>$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > 3.$
▶ ОДЗ: $x - 5 > 0$, тобто $x > 5$.
$\log_{\frac{1}{2}}(x-5) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3.$
Функція $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ є спадною,
отже, $x - 5 < \left(\frac{1}{2}\right)^3$, $x < 5\frac{1}{8}$.
Враховуючи ОДЗ, маємо $5 < x < 5\frac{1}{8}$.
Відповідь: $\left(5;\ 5\frac{1}{8}\right)$. ◁</td></tr>
</table>

3. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей	
Орієнтир	Приклад
I. За допомогою рівносильних перетворень задана нерівність зводиться до нерівності відомого виду. *Схема рівносильних перетворень нерівності:* 1. **Враховуємо ОДЗ** заданої нерівності (і уникаємо перетворень, які приводять до звуження ОДЗ). 2. Стежимо за тим, щоб **на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності.**	$\lg^2(10x) - \lg x \geqslant 3.$ ▶ ОДЗ: $x > 0$. На цій ОДЗ задана нерівність рівносильна нерівностям: $(\lg 10 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$, $(1 + \lg x)^2 - \lg x \geqslant 3$. *Заміна* $\lg x = t$ дає нерівність $(1 + t)^2 - t \geqslant 3$, тобто $t^2 + t - 2 \geqslant 0$, розв'язки якої $t \leqslant -2$ або $t \geqslant 1$ (див. рисунок).  Обернена заміна дає $\lg x \leqslant -2$ або $\lg x \geqslant 1$. Тоді $\lg x \leqslant \lg 10^{-2}$ або $\lg x \geqslant \lg 10$. Враховуючи, що функція $y = \lg x$ є зростаючою, одержуємо: $x \leqslant 10^{-2}$ або $x \geqslant 10$. Після врахування ОДЗ маємо: $0 < x \leqslant 0{,}01$ або $x \geqslant 10$. *Відповідь:* $(0;\ 0{,}01] \cup [10; +\infty)$. ◁
II. Застосовується загальний метод інтервалів (задана нерівність зводиться до нерівності виду $f(x) \gtrless 0$) і використовується схема: 1. **Знайти ОДЗ.** 2. **Знайти нулі $f(x)$.** 3. **Позначити нулі функції на ОДЗ і знайти знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ.** 4. **Записати відповідь, враховуючи знак нерівності.**	$\log_x(2x + 3) < 2.$ ▶ Розв'яжемо нерівність методом інтервалів. Вона рівносильна нерівності $\log_x(2x + 3) - 2 < 0.$ Позначимо $f(x) = \log_x(2x + 3) - 2$. 1. ОДЗ: $\begin{cases} 2x+3>0, \\ x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ Тобто $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 1. \end{cases}$ 2. Нулі функції: $f(x) = 0$. $\log_x(2x+3) - 2 = 0$. Тоді $\log_x(2x + 3) = 2$. На ОДЗ це рівняння рівносильне рівнянню $2x + 3 = x^2$ (яке одержуємо за означенням логарифма). Тобто $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. До ОДЗ входить тільки $x = 3$, отже, $f(x)$ має тільки єдиний нуль функції $x = 3$. 3. Відмічаємо нулі функції на ОДЗ, знаходимо знак $f(x)$ у кожному з проміжків, на які розбивається ОДЗ, і записуємо розв'язки нерівності $f(x) < 0$.  *Відповідь:* $x \in (0;\ 1) \cup (3; +\infty)$. ◁

Таблиця 9

Системи рівнянь

<table>
<tr><th colspan="2">1. Системи рівнянь</th></tr>
<tr><th>Поняття системи та її розв'язків</th><th>Приклади</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Якщо ставиться завдання знайти всі спільні розв'язки двох (або більше) рівнянь з однією або кількома змінними, то кажуть, що потрібно розв'язати систему рівнянь. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою.

Розв'язком системи називається таке значення змінної або такий впорядкований набір значень змінних (якщо змінних декілька), що задовольняє всім рівнянням системи.

Роз'язати систему рівнянь — значить знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.
Якщо система не має розв'язку, то її називають несумісною.</td><td>$\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ — система двох рівнянь з двома змінними.

Пара чисел (5; 1), тобто $\begin{cases} x = 5, \\ y = 1 \end{cases}$ — розв'язок системи.</td></tr>
<tr><td>$\begin{cases} x^2 - y + z = 0, \\ xy + xz + yz = 19, \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ — система трьох рівнянь з трьома змінними.

Трійка (1; 4; 3), тобто $\begin{cases} x = 1, \\ y = 4, \\ z = 3 \end{cases}$ — один з розв'язків системи.</td></tr>
<tr><th colspan="2">2. Рівносильність систем рівнянь</th></tr>
<tr><td>Дві системи рівнянь називаються рівносильними на деякій множині, якщо на цій множині вони мають однакові розв'язки (тобто кожний розв'язок першої системи на цій множині є розв'язком другої і, навпаки, кожний розв'язок другої системи є розв'язком першої).
Якщо змінити порядок запису рівнянь заданої системи, то одержимо систему, рівносильну заданій.
Якщо одне з рівнянь системи замінити на рівносильне йому рівняння, то одержимо систему, рівносильну заданій.</td><td>Областю допустимих значень (ОДЗ) системи називається спільна область визначення всіх функцій, що входять до запису цієї системи.
Всі рівносильні перетворення систем виконуються на ОДЗ початкової системи.</td></tr>
</table>

3. Основні способи розв'язування систем рівнянь
Спосіб підстановки
Виражаємо з одного рівняння системи одну змінну через іншу (чи через інші) і підставляємо одержаний вираз замість відповідної змінної у всі інші рівняння системи (потім розв'язуємо одержане рівняння чи систему і підставляємо результат у вираз для першої змінної).
Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$ Розв'язання. З першого рівняння системи $y = 2x - 3$. Підставляємо в друге рівняння системи і одержуємо $x + 2x - 3 = 3$. Звідси $x = 2$.   Тоді $y = 2x - 3 = 1$.   *Відповідь:* (2; 1).
Спосіб додавання
Якщо перше рівняння системи замінити сумою першого рівняння, помноженого на число $\alpha \neq 0$, і другого рівняння, помноженого на число $\beta \neq 0$ (а всі інші рівняння залишити без зміни), то одержимо систему, рівносильну заданій.
Приклад. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x - 3y = 9, \\ 3x + 2y = 13. \end{cases} \left\vert \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 3 \end{array} \right.$ Розв'язання. Помножимо обидві частини першого рівняння системи на 2, а другого — на 3 (щоб одержати як коефіцієнти при змінній y протилежні числа) і почленно додамо одержані рівняння. З останнього одержаного рівняння знаходимо значення x, підставляємо результат у будь-яке рівняння системи і знаходимо значення y. $\begin{cases} 10x - 6y = 18, \\ 9x + 6y = 39. \end{cases} \Big\vert +$ $19x = 57,$ $x = 3.$ Тоді $3 \cdot 3 + 2y = 13$, $2y = 4$, $y = 2$.   *Відповідь:* (3; 2).

Графічне розв’язування систем рівнянь з двома змінними

Виконуємо рівносильні перетворення заданої системи так, щоб зручно було будувати графіки всіх рівнянь, що входять до системи. Потім будуємо відповідні графіки і знаходимо координати точок перетину побудованих ліній — ці координати і є розв’язками системи.

Приклади

1. Розв’язати графічно систему $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ x + y = 3. \end{cases}$

Розв’язання. Задана система рівносильна системі $\begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 3 - x. \end{cases}$

Графіком кожного з рівнянь системи є пряма.

Для побудови прямої досить побудувати дві її точки.

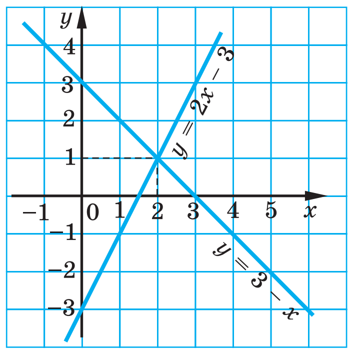
Наприклад, для

$y = 2x - 3$:

x	0	1
y	−3	−1

$y = 3 - x$:

x	0	1
y	3	2

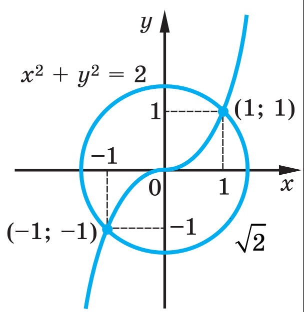


Графіки перетинаються в єдиній точці M (2; 1). Отже, пара чисел (2; 1) — єдиний розв’язок заданої системи.

Відповідь: (2; 1).

2. Розв’язати графічно систему $\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

Розв’язання. Задана система рівносильна системі $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$



Графік першого рівняння — коло радіуса $\sqrt{2}$ з центром у початку координат, а графік другого — кубічна парабола $y = x^3$.

Ці два графіки перетинаються в двох точках з координатами (−1; −1) і (1; 1).

Відповідь: (−1; −1), (1; 1) — розв’язок системи.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ 1

§ 1. **5.** 1) $-1\frac{2}{3}$; 1; 2) −1; 2; 3) 0; ±2; 4; 4) −5,5; −0,5; ±2,5. **6.** 1) [3; 4]; 2) $(-\infty; -4)\cup\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 3) $(-\infty; -0{,}5]\cup[1{,}5; +\infty)$; 4) $(-5{,}5; -3{,}5)\cup(0; 2)$.

§ 2. **3.** 1) −3; 2) 9; 3) 0; 4) 1. **4.** 1) 11; 2) 1; 3) $\frac{1}{6}$; 4) −8. **5.** 1) $(0; 1]\cup[2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0)\cup(0{,}5; +\infty)$; 3) (1; 2); 4) $[1; 3]\cup(4; +\infty)$. **6.** 1) $(-1; 0]\cup(1; +\infty)$; 2) $[0{,}5; 1)\cup(1; +\infty)$; 3) $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right]\cup[-1; 1]\cup\left[\sqrt{3}; +\infty\right)$ або $x = 1{,}5$; 4) $(1; 2)\cup$ $\cup(2; +\infty)$.

§ 3. **1.** 1) 6; 2) 7; 3) 5. **2.** 1) $3\Delta x$; 2) $3x_0\Delta x(x_0+\Delta x)+(\Delta x)^3$; 3) $\Delta x(2x_0+\Delta x-1)$; 4) $\Delta x+\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}$. **5.** а) $f'(x_1)=\sqrt{3}$; $f'(x_2) = 1$; б) $f'(x_1)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $f'(x_2) = 0$; в) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2) = 0$; г) $f'(x_1) = 0$; $f'(x_2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$. **6.** 1) 6; 2) 1; 3) −1; 4) 1. **7.** 1) $y = 2x - 1$; 2) $y = 0$; 3) $y = x - 0{,}25$; 4) $y = -6x - 9$. **8.** 1) $y = 0{,}5x + 0{,}5$; 2) $y = x + 0{,}25$; 3) $y = 0{,}25x + 3$; 4) $y=\frac{1}{6}x+1\frac{1}{2}$. **9.** 1) 1; 2) 13; 3) 75; 4) 0,25.

§ 4. **1.** 1) $8x^7$; 2) $-5x^{-6}$; 3) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$; 4) $20x^{19}$; 5) $-20x^{-21}$; 6) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$. **2.** 1) 1; 2) $5x^4 - 1$; 3) $-\frac{1}{x^2}-3x^2$; 4) $2x+\frac{1}{2\sqrt{x}}$. **3.** 1) $6x^2 + 3$; 2) $2x + 5$; 3) $4x^3 - 4x$; 4) $\frac{1}{\sqrt{x}}+12x^2$. **4.** 1) $6x^2 + 6x^5$; 2) $-6x^2 + 2x + 2$; 3) $-4x^3 + 6x^2 - 3$; 4) $\frac{15x^2-3x}{2\sqrt{x}}$. **5.** 1) $\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}$; 2) $-\frac{7}{(3x-2)^2}$; 3) $-\frac{11}{(5x+1)^2}$; 4) $\frac{2x^2-2x}{x^4}$. **6.** 1) $f'(-2) = -2$; $f'\left(\frac{1}{2}\right)=3$; 2) $f'(2) = 28$; $f'(-1) = -8$; 3) $f'(0)=-\frac{5}{9}$; $f'(-3)=-\frac{5}{81}$; 4) $f'\left(-\sqrt{2}\right)=1{,}5$; $f'(0{,}1) = 101$. **7.** 1) 1; 2) −2; 0; 3) ±0,5; 4) 0,25. **8.** 1) $(1; +\infty)$; 2) (−2; 0); 3) $(-2; 0)\cup(0; 2)$; 4) $(-\infty; -1)\cup(1; +\infty)$. **9.** 1) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x) = \sin x$; 2) $f(u) = u^5$; $u(x) = 2x + x^2$; 3) $f(u)=\sqrt{u}$; $u(x) = x^3 - x$; 4) $f(u) = \cos u$; $u(x)=2x-\frac{\pi}{4}$. **10.** 1) $\boldsymbol{R}$; 2) $[-3; +\infty)$; 3) $(4; +\infty)$; 4) $(-\infty; -2)\cup(2; +\infty)$; 5) $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 6) (0; 0,5]; 7) $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in\boldsymbol{Z}$; 8) [0,1; 10]. **11.** 1) $3(x^2 - x)^2(2x - 1)$;

2) $-10(2x-1)^{-6}$; 3) $4\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$; 4) $\frac{5-2x}{2\sqrt{5x-x^2}}$; 5) $\frac{3}{4\sqrt{3x}(2+\sqrt{3x})}-\frac{4}{(2x-1)^3}$.
12. 1) $y=7x-4$; 2) $y=26x+54$; 3) $y=-0{,}5x+1{,}5$; 4) $y=7x+6$.

§ 5. **1.** 1) $-\sin x$; 2) $2\cos x-3$; 3) $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$; 4) $3x^2+\frac{1}{\sin^2 x}$.
2. 1) $\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$; 2) $\operatorname{ctg} x-\frac{x}{\sin^2 x}$; 3) $\sin x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)$; 4) $-\cos x\left(1+\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.
3. 1) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 2) $\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}$; 3) $\sin 2x$; 4) $-\sin 2x$. **4.** 1) $\cos x$; 2) $2\cos 2x$; 3) $-6\sin 6x$; 4) $-4\sin 4x$. **5.** 1) $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$; 2) $-2x\sin x^2$; 3) $-\sin x\cos(\cos x)$; 4) $\frac{3}{\cos^2 6x\sqrt{\operatorname{tg} 6x}}$. **6.** 1) $3e^x$; 2) $e^x-\frac{1}{x}$; 3) $-e^{-x}+5x^4$; 4) $\frac{2}{2x-1}$. **7.** 1) $e^{5x}(5\cos x-\sin x)$; 2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$; 3) $\frac{\lg x}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt{x}\ln 10}$; 4) $x^2\left(3\log_2 x+\frac{1}{\ln 2}\right)$. **8.** 1) 0; 2) 2; 3) -1; 4) -8. **9.** 1) 4; 2) 1,5; 3) 0; 4) 0. **10.** 1) Немає; 2) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; 3) $\frac{\pi k}{4}$, $k\in Z$; 4) $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. **11.** 1) -2; 2) 0; 3) e; 4) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in Z$.
12. 1) $(0{,}5\ln 0{,}5;\ +\infty)$; 2) $(-\infty;\ 0)\cup(0{,}5;\ +\infty)$; 3) $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$; 4) $(1{,}5;\ +\infty)$.
13. 1) а) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; б) $\left(\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right)$; в) $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; 2) а) 1; б) $(1;\ +\infty)$; в) $(0;\ 1)$; 3) а) e; б) $(0;\ e)$; в) $(e;\ +\infty)$; 4) а) e^{-2}; б) $(e^{-2};\ +\infty)$; в) $(0;\ e^{-2})$. **14.** 1) $y=-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}$; 2) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; 3) $y=2$; 4) $y=-1$. **15.** 1) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$; 2) 1; 3) 0. **16.** $y=5x+2$.
17. $y=3x-1$.

§ 6. **<u>Пункт 6.1.</u>** **1.** а) Зростає на $[-6;-4]$ та $[-2;2]$; спадає на $[-4;-2]$ та $[2;6]$; б) зростає на $[-7;-4]$ та $[-2;2]$; спадає на $[-4;-2]$ та $[2;7]$. **2.** Зростає на $(-\infty;-5]$ та $[5;+\infty)$; спадає на $[-5;5]$. **3.** Зростає на $[-3;-1]$; спадає на $(-6;-3]$ та $[-1;3)$.
6. 1) Зростає на $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;1]$; 2) зростає на $\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right]$ та $\left[2\sqrt{2};+\infty\right)$; спадає на $\left[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right]$; 3) зростає на $[-1;0]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $(-\infty;-1]$ та $[0;1]$; 4) зростає на $(-\infty;-1]$ та $[1;+\infty)$; спадає на $[-1;0)$ та $(0;1]$.
7. 1) Зростає на $[0;+\infty)$; спадає на $(-\infty;0]$; 2) зростає на $[1;+\infty)$; спадає на $(0;1]$; 3) зростає на $\left[-\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; спадає на $\left[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; 4) зростає на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in Z$; спадає на $\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$,

$k \in \boldsymbol{Z}$. **8.** 1) $(-\infty; 0]$; 2) $[1; +\infty)$; 3) $[0; 9]$. **9.** 1) 1; 2) 0; 3) π; 4) 1. **12.** 1) Зростає на $(-\infty; -2]$, $[1; +\infty)$; спадає на $[-2; 1]$; 2) $x = -2$ — точка максимуму; $x = 1$ — точка мінімуму. **16.** 1) Зростає на $[3; +\infty)$; спадає на $(-\infty; 3]$; $x = 3$ — точка мінімуму; $f(3) = -4$; 2) зростає на $[-1; 0]$ та $[1; +\infty)$; спадає на $(-\infty; -1]$ та $[0; 1]$; $x = \pm 1$ — точки мінімуму; $f(-1) = f(1) = -1$; $x = 0$ — точка максимуму; $f(0) = 0$; 3) зростає на $(-\infty; -2]$ та $[2; +\infty)$; спадає на $[-2; 0)$ та $(0; 2]$; $x = -2$ — точка максимуму; $f(-2) = -4$; $x = 2$ — точка мінімуму; $f(2) = 4$; 4) зростає на $[1; 2]$; спадає на $[2; 3]$; $x = 2$ — точка максимуму; $f(2) = 2$. **17.** 1) Зростає на $[e; +\infty)$; спадає на $(0; 1)$ та $(1; e]$; $x = e$ — точка мінімуму; $f(e) = e$; 2) зростає на $[-0,5; 0]$ та $[0,5; +\infty)$; спадає на $(-\infty; -0,5]$ та $[0; 0,5]$; $x = \pm 0,5$ — точки мінімуму; $f(-0,5) = f(0,5) = -1,25$; $x = 0$ — точка максимуму; $f(0) = -1$; 3) зростає на $(-\infty; 1]$ та $[1; +\infty)$; 4) зростає на $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; спадає на $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — точка мінімуму; $f\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, — точка максимуму; $f\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **Пункт 6.2.** **4.** 1) б) $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$; в) при $a < -4$, $a > 4$ — два; при $a = \pm 4$ — один; при $-4 < a < 4$ — немає; 2) б) $[-2; +\infty)$; в) при $a < -2$ — немає; при $a = -2$, $a > 0$ — один; при $-2 < a \leqslant 0$ — два; 3) а) графік функції зображено на рис. 180; б) $\left[-\frac{2}{e}; +\infty\right)$; в) при $a < -\frac{2}{e}$ — немає; при $a = -\frac{2}{e}$, $a \geqslant 0$ — один; при $-\frac{2}{e} < a < 0$ — два; 4) а) графік функції зображено на рис. 181; б) $(-\infty; 0) \cup [e; +\infty)$; в) при $a < 0$, $a = e$ — один; при

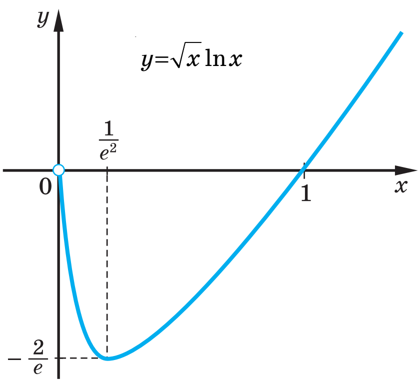


Рис. 180

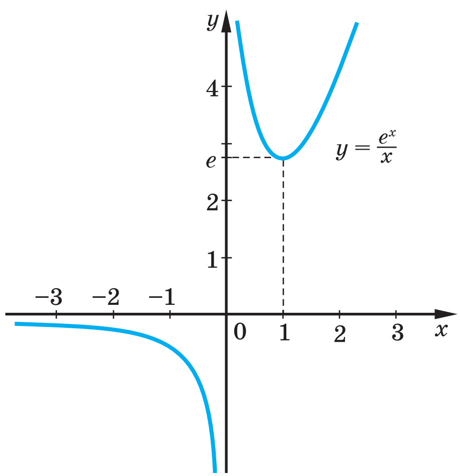


Рис. 181

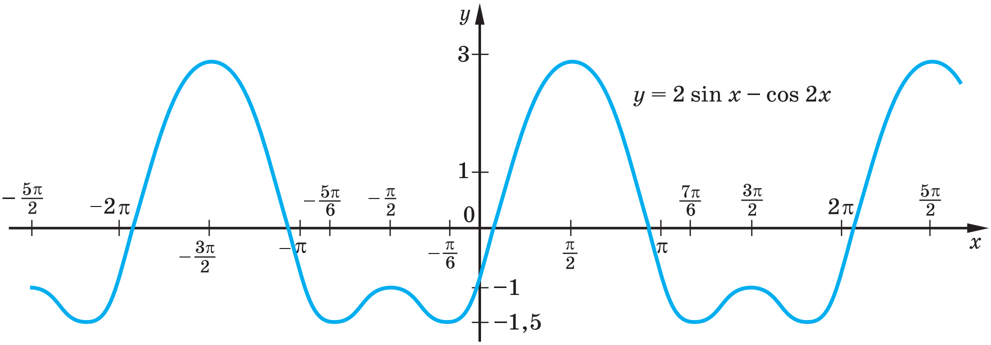


Рис. 182

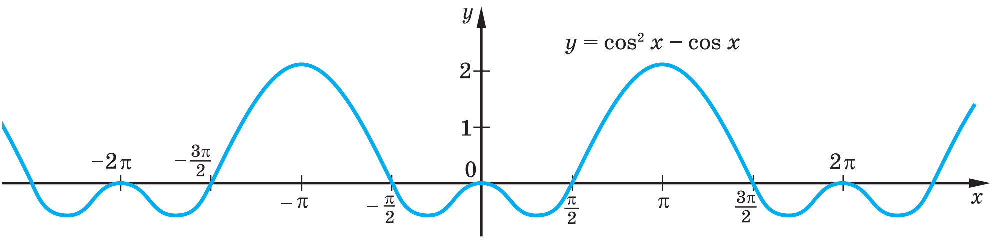


Рис. 183

$0 \leqslant a < e$ — немає; при $a > e$ — два. **5.** 1) 1; 2) 2; 3) 1; 4) 3. **6.** 3), 4) Графіки функцій зображено на рис. 182 і 183; **7.** $\left(\frac{e}{6}\right)^6$. **<u>Пункт 6.3.</u>** **1.** 1) $f_{max} = 9$, $f_{min} = 5$; 2) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = 6$, $f_{min} = -2$; 4) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -31$. **2.** 1) $f_{max} = 4$, $f_{min} = -4$; 3) $f_{max} = 1 - \frac{\pi}{4}$, $f_{min} = -\pi$. **3.** 2) $f_{max} = 1$, $f_{min} = -3$; 4) $f_{max} = \ln 2 + 5$, $f_{min} = \ln 4 - 2$. **4.** 1) $f_{max} = 5$, $f_{min} = -52$; 4) $f_{max} = 78$, $f_{min} = -58$. **5.** 5; 5. **6.** 3,5; 0,5. **7.** 0; 8. **8.** Квадрат із стороною 5 см. **9.** $\frac{a}{6}$. **12.** 4. **13.** Рівнобедрений трикутник із бічною стороною $\frac{a}{2}$ і кутом α при вершині. **14.** $\frac{\pi R^3}{\sqrt{2}}$. **16.** 13. **17.** 367. **18.** $14 + 2\pi$. **19.** До точки відрізка AB, віддаленої від B на 1 км.

§ 7. **4.** 1) -3; 2) ± 2; 3) 2; 4) -3; 1. **5.** 1) -3; 2) 25; 3) $-\frac{5}{6}$; 4) 14; 5) 5; 6) -3; 7) 0,25; 8) $2\sqrt{2}$; 9) 3; 10) 2; 11) 0; 12) $-1\frac{5}{7}$; 13) $\frac{a}{b}$; 14) 1; 15) 1,25; 16) $4\frac{2}{3}$. **6.** 1) $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ або $x = 1$; 3) $(-3; -2] \cup [3; 4)$; 5) $(-\infty; -1] \cup (8; +\infty)$; 8) $[-2; 3]$.

§ 10. **1.** 1) $6x-6$; 2) $12x^2 \ln x + 7x^2$; 3) $-2\sin x - x\cos x$; 4) $(2-x^2)\sin x + 4x\cos x$. **2.** 1) Опукла вниз на $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$; опукла вгору на $(-1; 1)$; $x=\pm 1$ — точки перегину; 2) опукла вниз на $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$ та $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$; опукла вгору на $\left(-\pi; -\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$ та $\left(\frac{3\pi}{4}; \pi\right)$; $x=\pm\frac{\pi}{4}$, $x=\pm\frac{3\pi}{4}$ — точки перегину; 3) опукла вниз на $(-\infty; -1)$ та $(0;1)$; опукла вгору на $(-1; 0)$ та $(1; +\infty)$; $x=0$ — точка перегину; 4) опукла вниз на $(e\sqrt{e}; +\infty)$; опукла вгору на $(0; e\sqrt{e})$; $x=e\sqrt{e}$ — точка перегину.

§ 11. **Пункт 11.1.** **1.** 1) 3; 2) 5. **2.** 1) ± 1; 2) 0. **3.** 1) 2; 2) 0; 3) 2. **4.** 1) 0; 2) 0; 3) 1. Вказівка. При $x<0$ виконати оцінку значень лівої і правої частин рівняння. **5.** 1) 1; 2; 2) 1; 3; 3) -2; 0. **6.** 1) 0; 1; 3; 2) 0; 1; 2; 3) 0; ± 1.

Додаткові вправи. **2.** 1) 8; 2) 6. **3.** 1) 8. **9.** 1) 0,25. **27.** 7) Вказівка. Прологарифмувати рівність $y=(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$ за основою e і взяти похідну від обох частин одержаної рівності (враховуючи, що $\ln y$ —складена функція). Потім з останньої рівності знайти y'.

Розділ 2

§ 14. **4.** 1) Ні; 2) так; 3) так; 4) ні. **5.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **6.** 1) $2x-\frac{x^5}{5}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\sin x+C$; 3) $2x^2+C$; 4) $-8x+C$; 5) $\frac{x^7}{7}+C$; 6) $-\frac{1}{2x^2}-2x+C$; 7) $x+\frac{1}{3x^3}+C$; 8) $\frac{x^4}{4}+C$. **7.** 1) $2x-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2x^2}+C$; 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2x^4}+\sin x+C$; 3) $-\frac{1}{x}+\cos x+C$; 4) $\frac{5}{3}x^3-x+C$; 5) $\frac{1}{12}(2x-8)^6+C$; 6) $-\frac{3}{2}\cos 2x+C$; 7) $-\frac{1}{40}(4-5x)^8+C$; 8) $-\frac{1}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+C$; 9) $\frac{1}{15(4-15x)^3}+C$; 10) $-2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 11) $-\frac{4}{3(3x-1)}+C$; 12) $\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x-1)+C$. **8.** 1) $x-\frac{1}{3}\sin 3x+2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+C$; 2) $-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} 4x-2\sqrt{2-x}-x^3+C$; 3) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1)-3\cos(4-x)+x^2+C$; 4) $\frac{1}{4(3-2x)^2}+\frac{6}{5}\sqrt{5x-2}+2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+C$. **9.** 1) $-\frac{1}{x}-10$; 2) $\operatorname{tg} x-1$; 3) $\frac{x^4}{4}+1\frac{3}{4}$; 4) $-\cos x-2$. **10.** 1) x^2+x; 2) x^3-x^2+4; 3) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{1}{2}$; 4) $-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-4\frac{1}{3}$. **11.** 1) $2\sin x+3$; 2) $x-\frac{x^3}{3}+3$; 3) $-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2$; 4) $-\frac{1}{3x^3}+5\frac{2}{3}$. **12.** 1) $2x^2-\frac{1}{x}+1$; 2) $\frac{x^4}{4}+2x+3$;

3) $x - x^2 + 8$; 4) $-\frac{1}{x} - 2x^5 + 3x + 5$. **13.** $\frac{t^3}{3} + t^2 - t$. **14.** $4\sin\frac{t}{2} + 2$. **15.** $t^4 + 2t^2 + 2t + 7$.

§ 15. **<u>Пункт 15.1.</u>** **1.** 1) 6,6; 2) 1; 3) 20; 4) 1; 5) $\frac{1}{15}$; 6) 6; 7) 0,9; 8) 0,5. **3.** 1) 3; 2) 2; 3) $9\sqrt{3}$; 4) 4; 5) $\frac{2\pi}{3} + 1$; 6) 78; 7) $\frac{\pi + 3}{12}$; 8) 9,5. **4.** 1) 0,4; 2) 1,6; 3) $9\frac{1}{3}$; 4) $10\frac{2}{3}$. **5.** 1) 0,75; 2) 2; 3) $7\frac{1}{3}$; 4) $5\frac{1}{3}$. **6.** 1) 4,25; 2) $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$; 3) $2\frac{2}{3}$; 4) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **<u>Пункт 15.2.</u>** **7.** $5\frac{1}{3}$. **8.** 4,5. **9.** 2) $\frac{15\pi}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{16\pi}{15}$. **10.** 1) $\frac{2\pi}{5}$; 2) 11π; 3) $\frac{50\pi}{3}$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

§ 16. **1.** 1) 68 м; 2) $21\frac{1}{3}$. **2.** 1) $y = 3x - 2x^2 + C$; 2) $y = 2x^3 - 4x^2 + x + C$; 3) $y = 1{,}5e^{2x} + C$; 4) $y = 2\sin 2x + C$. **3.** 1) $y = 1 - \cos x$; 2) $y = 2\sin x + 1$; 3) $y = x^3 + 2x^2 - x - 4$; 4) $y = 2x + x^2 - x^3 + 2$; 5) $y = e^x + 1 - e$; 6) $y = -e^{-x} + 3$.

Розділ 3

§ 17. **13.** 34. **14.** 80 %.

§ 18. **<u>Пункт 18.1.1.</u>** **1.** 12. **2.** 1) 16; 2) 60. **3.** 1) 2052; 2) яблуко. **4.** 1680. Вказівка. Доцільно за місця вибрати екзамени і розміщувати по них задані дні. **5.** 24. **6.** 870. **7.** 336. **8.** 210. **9.** 2730. **10.** $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22$. **11.** 120. **12.** 96. **13.** 544 320. **14.** 1) 24; 2) 12. **15.** 1) 5; 2) 6. **<u>Пункт 18.1.2.</u>** **1.** 24. **2.** 5040. **3.** 120. **4.** 6. **5.** 1) 720; 2) 600. **6.** 1) 6; 2) 6. **7.** 384. **8.** 240. **9.** $5! \cdot 7! \cdot 8$. **10.** $10!$; $(5!)^2$. **<u>Пункт 18.1.3.</u>** **1.** 21. **2.** 56. **3.** 210. **4.** 1) 55; 2) 165. **5.** 400 400.

§ 19. **<u>Пункт 19.1.</u>** **1.** 1) Випадкова; 2) неможлива; 3) випадкова; 4) неможлива; 5) вірогідна; 6) вірогідна; 7) випадкова; 8) неможлива; 9) вірогідна; 10) випадкова; 11) випадкова. **4.** 1) 0,42; 2) 0,51; 3) 0,49. **5.** 1) 0,43; 2) 0,1; 3) 0,9. **6.** 0,03. **7.** 0,002. **8.** 0,998. **9.** 0. **10.** 1. **11.** 1) 1; 2) 0. **<u>Пункт 19.2.</u>** **4.** 1) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$; 2) $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; 3) $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3 + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 = \overline{\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}}$; 4) $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$; 5) $\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$. **5.** A і B; A і C; B і M; C і D; C і M; C і T; D і K; D і M; D і T. **6.** A і B; C і D; C і M; D і M; K і M. **7.** 1) 0,71; 2) 0,71; 3) 0,51; 4) 0,49; 5) 0,96; 6) 1. **8.** 1) 0,53; 2) 0,9; 3) 0,47; 4) 0,76. **9.** 1) 0,91; 2) 0,09. **10.** 1) 0,25; 2) 0,75. **11.** $P(A) = 0{,}8$; $P(\overline{A}) = 0{,}2$. **<u>Пункт 19.3.</u>** **1.** $\frac{1}{24}$. **2.** $\frac{1}{1250}$. **3.** 0,04. **4.** 0,75. **5.** 1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{1}{3}$. **6.** 0,95. **7.** 1) 0,5; 2) 0,5; 3) $\frac{2}{3}$. **8.** Виграші рівноможливі. **9.** Юра неправий. **10.** Ні. **11.** 1) Червоне; 2) 1; 3) 0; 4) 0,4; 5) 0,52. **12.** Все одно. **13.** 1 червона, 5 жовтих. **14.** Зелена, $p = \frac{1}{6}$. **15.** 1) $\frac{4}{15}$; 2) 0; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 11. **16.** 0,5. **17.** $\frac{1}{36}$.

18. $\frac{2}{3}$. **19.** $\frac{1}{120}$. **<u>Пункт 19.4.</u>** **1.** Шанси однакові. **2.** У кіно. **3.** Шанси однакові. **4.** $\frac{2}{\pi}$. **5.** $\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}$. **6.** 0,5. **7.** 0,4375. **<u>Пункт 19.5.</u>** **1.** 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{4}{30}$; 4) $\frac{1}{3}$. **2.** 1) 0,5; 2) 0,625. **3.** 0,2375. **4.** 0,2. **5.** $\frac{8}{203}$. **<u>Пункт 19.6.</u>** **1.** 0,64. **2.** $\frac{1}{12}$. **3.** 0,0012. **5.** 1) 0,42; 2) 0,985; 3) 0,14; 4) 0,425. **6.** 0,714. **7.** 0,126. **8.** 0,5. **9.** $n \geqslant 4$. **<u>Пункт 19.7.</u>** **4.** 1) Три з чотирьох; 2) не менше п'яти з восьми. **<u>Пункт 19.8.</u>**

1.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2.

X	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

Y	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Z	1	2
P	0,5	0,5

3.

X	0	1	2
P	0,25	0,5	0,25

4.

X	0	1	2	3
P	0,125	0,375	0,375	0,125

5.

X	34	35	36	37	38	39	40
M	1	3	4	6	3	2	1
W	0,05	0,15	0,2	0,3	0,15	0,1	0,05

6.

X	40	42	44	46	48	50	52	54
M	1	2	5	8	12	12	9	1
W	0,02	0,04	0,1	0,16	0,24	0,24	0,18	0,02

<u>Пункт 19.9.</u> **3.** 1) Вівторок і середа; четвер і п'ятниця; п'ятниця і субота; 2) четвер і п'ятниця; 3) понеділок і вівторок; субота і неділя. **5.** 1) 12; 2) 33–38 років.

§ 20. **<u>Пункт 20.1.</u>** **2.** 240.

3.

Колір	чорний	червоний	синій	сірий	білий	жовтий	зелений
Кількість кепок	9600	6000	4800	4200	3300	1500	600

4.

Жирність	0	0,5	1	1,5	2,5	3,5	5
Кількість літрів	400	240	160	200	480	280	240

<u>Пункт 20.2.</u> **1.** 1) $R = 4$; $Mo = 2$; $Me = 2$; $\overline{X} = 2\frac{2}{3}$; 2) $R = 8$; $Mo = 2$; $Me = 1$; $\overline{X} = 0{,}6$. **2.** 1) $R = 3$; $Mo = 3$; $Me = 3$; $\overline{X} = 3\frac{4}{11}$; 2) $R = 8$; $Mo_1 = 4$; $Mo_2 = 5$; $Me = 4$; $\overline{X} = 3\frac{4}{7}$. **3.** $Mo_1 = 135$; $Mo_2 = 140$; $Me = 135$; $\overline{X} = 129\frac{6}{11}$. **<u>Пункт 20.3.</u>** **1.** 1) 3,5; 2) 2,5; 3) 1,2; 4) 9,2. **2.** 1) 2,56; 2) 4,96. **5.** 1) 1,67; 2) 1,9.

§ 21. **Пункт 21.2.** **1.** 1) 28 560; 2) 180 000. **2.** 2 980 000. **3.** 140 625. **4.** 1) 504; 2) 16 848; 3) 34 992; 4) 6561. **5.** 1) 40; 2) 48. В к а з і в к а. Врахувати остачі від ділення заданих цифр на 3. **6.** 2520. **7.** 16^{100}. **8.** 91. **9.** 1) C_{19}^5; 2) C_{25}^5. **10.** C_{n-1}^{k-1}.

§ 22. **Пункт 22.1.** **2.** 1) $x = 3$; $y = -4$; 2) $x = 3$; $y = 8$; 3) $x = -3$; $y = -2$; 4) $x = 1$; $y = 0$. **3.** 1) $8 - 2i$; 2) $-2 + i$; 3) $3 - 4i$; 4) 4. **4.** 1) $4 - 5i$; 2) $2 + 19i$; 3) $-11 - 5i$; 4) $6 + 4i$. **5.** 1) $18 + 16i$; 2) $-16 - 28i$; 3) $-18 + 14i$; 4) 65. **6.** 1) $3 - 4i$; 2) $5 + i$; 3) $2{,}96 - 0{,}28i$; 4) $0{,}5 - 0{,}5i$. **7.** 1) i; 2) i; 3) 1; 4) 0. **8.** 1) $-5 - 12i$; 2) $-2 - 2i$; 3) $-7 + 24i$; 4) $2 + 11i$. **10.** 1) $2 \pm i\sqrt{5}$; 2) $0{,}5 \pm 0{,}5i$; 3) $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$; 4) $\frac{-5 \pm i\sqrt{11}}{6}$.

Пункт 22.2. **2.** 1) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; 2) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 3) $3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 4) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; 5) $4(\cos\pi + i\sin\pi)$; 6) $2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$; 7) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. **3.** 1) $2\sqrt{3} + 2i$; 2) $-3 + 3\sqrt{3}i$; 3) $-\sqrt{2} - i\sqrt{2}$. **5.** 1) $z_1z_2 = 48\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -24\sqrt{3} - 24i$; $\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3i$; 2) $z_1z_2 = 18\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 18i$; $\frac{z_1}{z_2} = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$. **6.** 1) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}i$; 2) $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}-3}{4} - \frac{\sqrt{3}+3}{4}i$; 3) $\cos\pi + i\sin\pi = -1$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{4} + \frac{\sqrt{3}-1}{4}i$. **7.** 1) 256; 2) $32\,768i$; 3) 4096; 4) -1024. **8.** 1) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $-i$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\sqrt{\frac{3}{2}}$; 3) $\pm\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}$; 4) $\pm i$; $\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$. **9.** 1) $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$; 2) $3\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$. 3) $\pm 2i$; $\pm 3 \pm i$; 4) $\pm i$; $\pm 5i$.

Додаткові вправи. **1.** 729. **2.** 2916. **3.** 24. **4.** 48. **5.** 210. **6.** 816. **7.** 72. В к а з і в к а. Врахувати остачі від ділення заданих цифр на 3. **8.** 90. **10.** 480. **11.** 900. **12.** 54. **13.** 45. **14.** 11. **29.** Ні. **30.** З Наталкою. **31.** г). **32.** Імовірність одужати не більша за 0,01. **33.** Ні. а)–г) можливі.

Позначення, які зустрічаються в підручнику

$\boldsymbol{N}$ — множина всіх натуральних чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множина всіх цілих чисел

$\boldsymbol{Z}_0$ — множина всіх невід'ємних цілих чисел

$\boldsymbol{Q}$ — множина всіх раціональних чисел

$\boldsymbol{R}$ — множина всіх дійсних чисел, числова пряма

$\boldsymbol{R}_+$ — множина всіх додатних дійсних чисел

$[a; b]$ — відрізок (замкнений проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b)$ — інтервал (відкритий проміжок) з кінцями a і b, $a < b$

$(a; b]$, $[a; b)$ — напіввідкриті проміжки з кінцями a і b, $a < b$

$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, $(-\infty; b)$ — нескінченні проміжки

$(-\infty; +\infty)$ — нескінченний проміжок, числова пряма

$(a-\delta, a+\delta)$ — δ-окіл точки a

$|x|$ — модуль (абсолютна величина) числа x

$[x]$ — ціла частина числа x

$\{x\}$ — дробова частина числа x

$f(x)$ — значення функції f у точці x

$D(f)$ — область визначення функції f

$E(f)$ — область значень функції f

Δx — приріст аргументу x

$\Delta f(x_0)$, Δf — приріст функції f у точці x_0

$f'(x_0)$ — похідна функції f у точці x_0

sin — функція синус

cos — функція косинус

tg — функція тангенс

ctg — функція котангенс

arcsin — функція арксинус

arccos — функція арккосинус

arctg — функція арктангенс

arcctg — функція арккотангенс

$\sqrt{a}$ — арифметичний корінь із числа a

$\sqrt[2k]{a}$ — арифметичний корінь $2k$-го степеня з числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)

$\sqrt[2k+1]{a}$ — корінь $(2k+1)$-го степеня з числа a ($k \in \boldsymbol{N}$)

$\log_a$ — логарифм за основою a

lg — десятковий логарифм (логарифм за основою 10)

ln — натуральний логарифм (логарифм за основою e)

$\max\limits_{[a;b]} f$ — найбільше значення функції f на відрізку $[a; b]$

$\min\limits_{[a;b]} f$ — найменше значення функції f на відрізку $[a; b]$

$\int f(x)dx$ — невизначений інтеграл функції f

$\int_a^b f(x)dx$ — визначений інтеграл функції f у межах від a до b

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Зміст

Розділ 2. ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Розділ 3. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ, ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович
ДОЛГОВА Оксана Євгенівна

АЛГЕБРА І ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Дворівневий підручник
для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Відповідальний за випуск *К. В. Новак*; художній редактор *С. Е. Кулинич*;
комп'ютерна верстка *І. В. Чернуха*; коректор *Н. С. Дорохіна*

Свідоцтво ДК № 457 від 22.05.2001
Підписано до друку 09.08.06. Формат 66×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 28,6

НМЦ «Світ дитинства» ТОВ
Україна, 61050, м. Харків, вул. Руставелі, 4/20.

Відгуки і пропозиції прохання надсилати на адресу видавництва